

III-118 深さとともに弾性率が増加する直交異方性地盤内の鉛直応力について

山梨大学工学部 正貫 村上幸利

1. はじめに

沖積粘土地盤は、たとえ同質な粘土で形成されても、土被り圧による自重圧密のために深さとともにその剛性(弾性率)を増し、しかも偏平状の粘土粒子の配向性によって直交異方性、特に横方向異方性(transverse isotropy)を保有する。このような地盤に外荷重が作用した場合の地中応力の算定は定常解析あるいは沈下解析に不可欠であるが、通常、地盤を等方等質性体と仮定し、Boussinesq解あるいはMichell解などによっている。しかし、この仮定はあくまでも便宜的なものであることから、地中応力に及ぼす地盤の異方性の影響および剛性の非一様性の影響を調べておくことは肝要である。

ここでは、深さとともに弾性率が増加する横方向異方性地盤内の鉛直応力分布の特性を調べるために行った弾性解析の結果について報告する。なお、鉛直応力はPoisson比によってあまり影響を受けないことが理論的に知られているので、解析を容易に進めるためPoisson比を零と仮定した。

2. 解析

地盤中の任意深さ z における鉛直および水平方向の弾性率をそれぞれ $E_v(z)$, $E_h(z)$ ($=nE_v(z)$)とする。この弾性率が深さとともに $E_{vh}(z) = E_{vh}(0) \exp(\alpha z)$ ($\alpha: \alpha > 0$ の任意定数) で増加する場合を考えると、変位で表した釣合式は、二次元問題では、

$$(1+n) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

$$n \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + n \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (1+n) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (1+n) \alpha \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

となる。ただし、 u, w はそれぞれ水平変位および鉛直変位である(図-1を参照)。式(1), (2)にFourier変換を施し、常微分形の方程式をつくると、

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \alpha \cdot \frac{d}{dz} - \xi^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} + \alpha \cdot \frac{d}{dz} - n \xi^2 \right) W = 0 \quad (3)$$

ただし、 $W(z, \xi) = \int_0^\infty w(z, \xi) \cos(\xi \xi) d\xi$ 。式(3)の一般解を求めるとき、

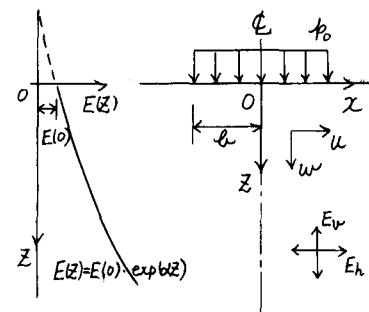


図-1

$$W = C_1 \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + n \xi^2}\right) z\right\} + C_2 \exp\left\{-\left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + n \xi^2}\right) z\right\} + C_3 \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \xi^2}\right) z\right\} + C_4 \exp\left\{-\left(-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \xi^2}\right) z\right\} \quad (n \neq 1) \quad (4)$$

いま、半無限地盤を考えると、 $z \rightarrow \infty$ に対して $W \rightarrow 0$ であらねばならない。よって、 $C_2 = C_4 = 0$ となる。逆変換を施し、境界条件: $z = 0$ (地盤表面) でせん断応力 $\tau_{xz} = 0$, 鉛直応力 $\sigma_z = f(z)$ を考えて鉛直応力解を求めるとき、たとえば、等分布帶状荷重の場合、

$$\frac{\sigma_z}{q_0} = \frac{2}{\pi} \exp(\alpha z) \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \left(k_n \exp(-k_n z) - n k_1 \exp(-k_1 z) \right) \sin(k_1 \xi) \cos(x \xi) d\xi \quad (n \neq 1) \quad (5)$$

となる。ただし、 $k_n = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + n \xi^2}$, $k_1 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \xi^2}$ また、 q_0 : 荷重強度, x : 荷重半幅である。

鉛直応力解は積分表示となっているが、被積分項は比較的簡単な形である。また、 ξ に対する収束性も良いの

で、この数値積分はパソコンで充分に計算できる程度のものである。

さて、いま荷重を帯状から円形に変えると、鉛直応力解は、

$$\frac{\sigma_z}{P_0} = \alpha \exp(\alpha z) \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{n-\eta^2}} \cdot \left\{ J_n \exp(-\eta z) - n \eta \exp(-\eta z) \right\} J_1(\alpha \eta) J_0(n \eta) d\eta \quad (5)'$$

となる。ただし、 α : 荷重半径、 n : 動径方向座標であり、 J_0, J_1 は Bessel 関数である。ここで、 $\alpha = 0$ すなまち、弾性率を一定とする（深さ方向に対して）と、

$$\frac{\sigma_z}{P_0} = \frac{\alpha}{1-\sqrt{n}} \int_0^\infty \left\{ \exp(-\sqrt{n} z) - \sqrt{n} \exp(-z) \right\} J_1(\alpha z) J_0(n z) dz \quad (6)$$

全荷重 $P (= \pi \alpha^2 P_0)$ を不变のまま、半径 α を無限大に近づけて、集中荷重にすると、

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z}{P} &= \frac{P}{2\pi(1-\sqrt{n})} \int_0^\infty \left\{ \exp(-\sqrt{n} z) - \sqrt{n} \exp(-z) \right\} J_1(n z) dz \\ &= \frac{\sqrt{n} z P}{2\pi(1-\sqrt{n})} \left\{ \frac{1}{((\sqrt{n} z)^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right\} \quad (n \neq 1) \end{aligned} \quad (7)$$

これは、当然ながら Wolf によって見い出された解に一致している。

3. 数値計算結果と考察

地盤の異方性の程度を表すし、および深さ方向への弾性率の変化度合を表すしを変えて式 (5) より計算したいいくつかのケースにおける鉛直応力分布を図示する。

図-2 は荷重中心線上での分布である。 αb が一定のとき、 n が大きいほど、すなまち鉛直方向の弾性率に比べて水平方向の弾性率が大きいほど、深い部分での鉛直応力の減衰は著しく、応力分散が大きいことがわかる。また、 n が一定で、 αb を変えた場合は、 αb が小さいほど、すなまち n が一定のとき深さ方向への弾性率増加割合が小さいほど応力分散が大きくなっている。一方、観点を変えて、ある深さ（ここでは $z/b = 1$ ）における応力分布を示したもののが図-3 である。これを見ると図-2 での特性をそのまま表している。図中、破線は等方性体 ($n=1, \alpha=0$) を対象とした Michell 解である。一般的な沖積粘土地盤 ($n=2 \sim 4, b=10m$ として $\alpha b=1 \sim 5$) における鉛直応力を算定する場合、Michell 解と本解の差異は平均 10% 程度 ($z/b=1$ の水平面上で) あり、深い部分ほどこの差異が顕著になる傾向がうかがえる。

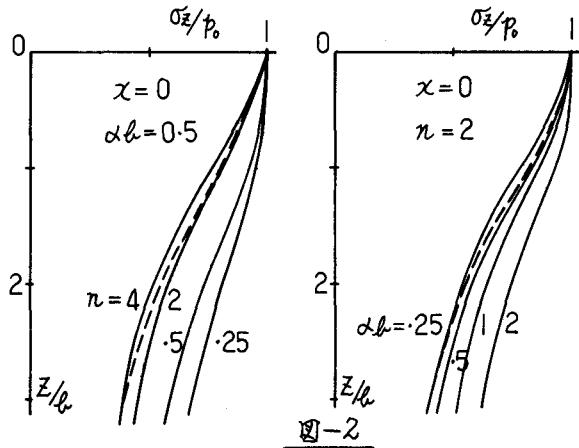


図-2

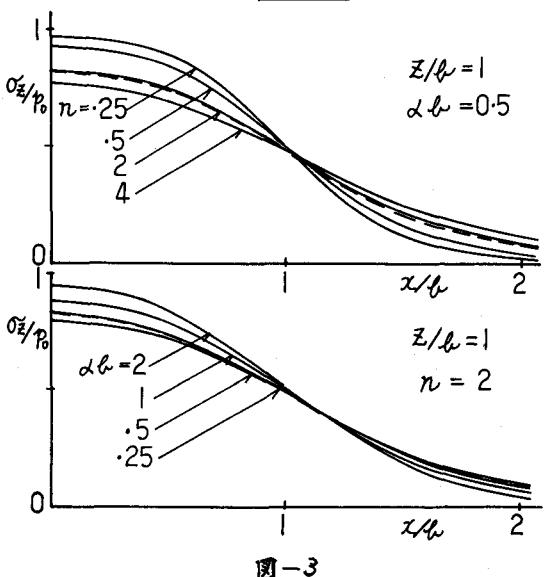


図-3

* Burland & Wroth (1974) : Conf. on Settlement of Structures, Cambridge.