III-77　Biotの圧密方程式に於けるGreen公式とその応用

京大工　正　西村直志
京大工　正　小林昭一

1　序　Biotの方程式に積分方程式法（境界要素法というのはその別名）を用いる試みが2，3行なわれているが［1，2］，筆者らはGreen公式を用いてBiotの方程式の解の挙動を調べる事ができる事を示した[3]．本報は[3]の結果の一般化について論じたものである．特に液相の圧縮性についても考慮する．

2　Biotの方程式とGreen公式　Biotの方程式は，変位$\boldsymbol{u}$，間隙圧pを用いて

$$\Delta^{*}\boldsymbol{u}-\nabla p=-\boldsymbol{f},\qquad \nabla\cdot\dot{\boldsymbol{u}}+m\dot{p}-\boldsymbol{K}\cdot\nabla\nabla p=g \tag{1}$$

と書ける．ここに$\boldsymbol{f}$は物体力，$g=-F_f\boldsymbol{k}\cdot\nabla\boldsymbol{f}$，$F_f$は液相のFraction，$\boldsymbol{K}$は透水係数テンソル(2階)，$m$は液相の圧縮率である．又$\dot{}$は時刻$t$に関する微分であり，$\Delta^{*}\boldsymbol{u}\equiv\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\nabla\boldsymbol{u})$，及び$\boldsymbol{C}$は弾性常数テンソル(4階)である．考える領域D(一応内部領域としておく)と，その境界∂D，及び任意の時刻$0<t_1<t_2$に関して次の恒等式が成立するが，これが式(1)の相反関係式である(なおdV，dS，dt等は省略した)：

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial D}(\dot{\boldsymbol{u}}^{*}\cdot\boldsymbol{s}-\dot{\bar{\boldsymbol{s}}}^{*}\cdot\boldsymbol{u}-p^{*}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}\nabla p+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K}\nabla p^{*}p)$$

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^{*}$：ベクトル
p,p^{*}：スカラー

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{D}\{\dot{\boldsymbol{u}}^{*}\cdot(\Delta^{*}\boldsymbol{u}-\nabla p)-(\Delta^{*}\dot{\boldsymbol{u}}^{*}+\nabla\dot{p}^{*})\cdot\boldsymbol{u}$$
$$+p^{*}(\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{u}}+m\dot{p}-\boldsymbol{K}\cdot\nabla\nabla p)-(\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{u}}^{*}-m\dot{p}^{*}-\boldsymbol{K}\cdot\nabla\nabla p^{*})p\}-\int_{D}p^{*}[\nabla\cdot\boldsymbol{u}+mp]_{t_1}^{t_2}, \tag{2}$$

ここに，$\boldsymbol{n}$は外向き単位法線ベクトル，$[\cdot]_{t_1}^{t_2}=\cdot(t_2)-\cdot(t_1)$，$\boldsymbol{s}$，$\bar{\boldsymbol{s}}^{*}$は表面力，及び「双対」表面力：

$$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{C}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\boldsymbol{1}p)\boldsymbol{n},\qquad \bar{\boldsymbol{s}}^{*}=(\boldsymbol{C}\cdot\nabla\boldsymbol{u}^{*}+\boldsymbol{1}p^{*})\boldsymbol{n},$$

$\boldsymbol{1}$は単位テンソルである．式(2)から，解$\boldsymbol{u}$，pのGreen表示(式(6))を得るためには，方程式

$$\begin{pmatrix}\Delta^{*} & -\nabla\frac{d}{dt}\\ -\nabla\cdot & -m\frac{d}{dt}+\boldsymbol{K}\cdot\nabla\nabla\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},t) & \dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)\\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t) & Q(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\,\delta(\boldsymbol{x})\delta(t) & 0\\ 0 & \delta(\boldsymbol{x})\delta(t)\end{pmatrix} \tag{3}$$

及び因果律($t<0$で0)を満たす解$\dot{\boldsymbol{U}}$，$\dot{\boldsymbol{V}}$，$\boldsymbol{P}$，Qを求めればよい．ここに$\delta(\cdot)$はDiracのデルタである．式(3)の解はFourier変換を用いて容易に求まり，$\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x})\delta(t)+\dot{\mathscr{U}}(\boldsymbol{x},t)$，$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x})\delta(t)+\dot{\mathscr{V}}(\boldsymbol{x},t)$，$\dot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{P}_0(\boldsymbol{x})\delta(t)+\dot{\mathscr{P}}(\boldsymbol{x},t)$，$\dot{Q}(\boldsymbol{x},t)=Q_0(\boldsymbol{x})\delta(t)+\dot{\mathscr{Q}}(\boldsymbol{x},t)$と書ける．ここに

$$\boldsymbol{U}_0=F^{-1}\{\Delta^{*-1}-\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi}\otimes\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi}/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})\},\quad \dot{\mathscr{U}}=F^{-1}\{\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi}\otimes\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi}\,(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi})e(\boldsymbol{\xi},t)/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})^2\}H(t),$$

$$\boldsymbol{V}_0=F^{-1}\{-i\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi}/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})\},\quad \dot{\mathscr{V}}=F^{-1}\{i\,\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi}\,(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi})e(\boldsymbol{\xi},t)/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})^2\}H(t),$$

$$\boldsymbol{P}=F^{-1}\{-i\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi}\,e(\boldsymbol{\xi},t)/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})\}H(t),\quad \boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{V}_0,\quad \dot{\mathscr{P}}=\dot{\mathscr{V}},\quad Q=F^{-1}\{e(\boldsymbol{\xi},t)/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})\}H(t),$$

$$Q_0=F^{-1}\{1/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})\},\quad \dot{\mathscr{Q}}=F^{-1}\{-\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi}\,e(\boldsymbol{\xi},t)/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})^2\},\quad e(\boldsymbol{\xi},t)=e^{-\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi}t/(m+\boldsymbol{\xi}\cdot\Delta^{*-1}\boldsymbol{\xi})}, \tag{4}$$

F^{-1}は$\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{x}$のF逆変換，$H(\cdot)$はステップ関数，$\Delta^{*-1}$は$\Delta^{*}$の$\nabla$を$\boldsymbol{\xi}$で置換えた行列の逆である．例えば，2次元等方問題では，$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=\lambda\boldsymbol{1}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon}+\mu(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{\epsilon}^{T})$，$\boldsymbol{K}=k\boldsymbol{1}$となり，基本解は次の様に陽に書き下す事ができる：

$$\dot{\mathbf{U}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\mu}\left(-\frac{\lambda+(3-B)}{\lambda+2\mu}\log R\,\mathbf{1}+\frac{\lambda+(1+B)\mu}{\lambda+2\mu}\nabla R\otimes\nabla R\right)\delta(t)+\frac{B^2 k\,H(t)}{\pi}\left\{\mathbf{1}\,\frac{f_1}{2}-\nabla R\otimes\nabla R\,(f_1-f_2)\right\}$$

$$\dot{\mathbf{V}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{B\,\nabla R}{2\pi R}\,\delta(t)-\frac{BR\,f_2}{2\pi t}\,\nabla R\;H(t),\quad \mathbf{P}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{H(t)\,BR}{2\pi}\,f_1\nabla R,$$

$$Q(\boldsymbol{x},t)=\frac{B(\lambda+2\mu)\,H(t)}{\pi}\,f_2,\quad f_1=\frac{1-e^{-R^2/4BC_v t}}{R^2},\quad f_2=\frac{e^{-R^2/4BC_v t}}{4BC_v t},\quad f_3=\frac{R^2\,e^{-R^2/4BC_v t}}{(4BC_v t)^2}.\tag{5}$$

記号の意味は，$B=1/\{m(\lambda+2\mu)+1\}$，$C_v=k(\lambda+2\mu)$，$R=|\boldsymbol{x}|$ である．式(2)の $\boldsymbol{u}^*$，p^* に各々 $-\dot{\mathbf{U}}(-\boldsymbol{x},-t)$，$\mathbf{P}(-\boldsymbol{x},-t)$ $(-\dot{\mathbf{V}}(-\boldsymbol{x},-t),\ Q(-\boldsymbol{x},-t))$ を代入すれば，$\boldsymbol{u}$ (p) のGreen表示が次の様に得られる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},s)=&\int_{\partial D}\mathbf{U}_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},s)-\underline{\int_{\partial D}\mathbf{T}_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)}-\underline{\int_{\partial D}\mathbf{P}_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,q(\boldsymbol{x},s)}+\int_0^s\int_{\partial D}\dot{\mathcal{U}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)\\&-\underline{\int_0^s\int_{\partial D}\dot{\mathcal{T}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},s-t)\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}-\underline{\int_0^s\int_{\partial D}\dot{\mathcal{P}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,q(\boldsymbol{x},t)}-\int_0^s\int_{\partial D}\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\nabla_x\mathbf{P}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,p(\boldsymbol{x},t)\\&+\int_D\mathbf{U}_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},s)+\int_0^s\int_D\dot{\mathcal{U}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)+\int_0^s\int_D\mathbf{P}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,g(\boldsymbol{x},t)+\int_D\mathbf{P}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s)\,\theta(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{y},s)=&\underline{\int_{\partial D}\mathbf{V}_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},s)}-\underline{\int_{\partial D}\mathbf{W}_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)}-\int_{\partial D}Q_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\,q(\boldsymbol{x},s)+\underline{\int_0^s\int_{\partial D}\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)}\\&-\underline{\int_0^s\int_{\partial D}\dot{\mathcal{W}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},s-t)\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)}-\int_0^s\int_{\partial D}\dot{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,q(\boldsymbol{x},t)-\underline{\int_0^s\int_{\partial D}\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\nabla_x Q(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,p(\boldsymbol{x},t)}\\&+\int_D\mathbf{V}_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},s)+\int_0^s\int_D\dot{\mathcal{V}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)+\int_0^s\int_D Q(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,g(\boldsymbol{x},t)+\int_D Q(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s)\,\theta(\boldsymbol{x}),\end{aligned}\tag{6}$$

$$q=-\int_0^s\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\nabla p\,dt,\quad \boldsymbol{y}\in D,\quad s\,(\text{時刻})>0.$$

ここに θ は $\nabla\cdot\boldsymbol{u}+mp$ の初期値である．又 $\mathbf{T}_0$，$\mathbf{W}_0$，$\dot{\mathcal{T}}$，$\dot{\mathcal{W}}$ は各々 $(\mathbf{U}_0,\ \mathbf{P}_0)$，$(\mathbf{V}_0,\ Q_0)$，$(\dot{\mathcal{U}},\ \dot{\mathcal{P}})$，$(\dot{\mathcal{V}},\ \dot{\mathcal{Q}})$ から変数 $\boldsymbol{x}$ に ∇ を作用させ「双対」表面力を作る要領で求めた核（「二重層」）である．なお表面積分において Q_0 等に含まれる $C_0\delta(\boldsymbol{x})\delta(t)$ (C_0：定数) の項は $\boldsymbol{y}\in D$ の場合は0になる．式(6)の応用として次の結果が得られる．

1) $\boldsymbol{y}\in D$ の時，$s\downarrow 0$ とすれば式(6)の t に関する積分項，及び g を含む項は0になる．実際，式(4)から $\boldsymbol{y}\in D$，$s\sim 0$ のとき，各核が有界だからである．$\mathbf{P}(\cdot,0)$，$Q(\cdot,0)$ は各々 $\mathbf{P}_0(\cdot)$，$Q_0(\cdot)$ となる．この結果，$s\downarrow 0$ での $\boldsymbol{u}$，p は，$m\neq 0$ のときは $\mathbf{C}\to\mathbf{C}+\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}/m$，$\boldsymbol{f}\to\boldsymbol{f}-\nabla\theta/m$ なる置換をした弾性境界値問題を，境界値 $\boldsymbol{u}(\cdot,0)$，$\boldsymbol{s}(\cdot,0)+\theta(\cdot)\,\boldsymbol{n}/m$ の下に解いたときの変位 $\boldsymbol{u}$ 及び $(-\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\theta)/m$ に，又 $m=0$ のときは弾性常数 $\mathbf{C}$，物体力 $\boldsymbol{f}$，与えられた体積ひずみ θ の拘束付弾性体の，境界条件 $\boldsymbol{u}(\cdot,0)$，$\boldsymbol{s}(\cdot,0)$ の下での変位及び不定圧に一致する．2) $\boldsymbol{y}\to\partial D$ の極限移行を行うには，やはり基本解の表示を用いるのが簡単である．式(5)の解を用いると，式(6)の左辺を2で割り，右辺は $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\cdot)\to\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\cdot)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\cdot)$，---の項で $\int_{\partial D}\to ⨍_{\partial D}$（主値）の様に変えたものが得られる．3) ∂D に於いて $\boldsymbol{u}$ に関しては1）の結論が成立する．p に関しては，式(5)の解を用いて計算すると $\lim_{s\downarrow 0}\int_0^s\int_{\partial D}\dot{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},s-t)\,q(\boldsymbol{x},t)$ が必ずしも0にならない事に注意すれば，圧力が有界である限り，$\boldsymbol{y}\in\partial D$，$\boldsymbol{x}\in D$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}}\lim_{s\downarrow 0}p(\boldsymbol{x},s)=\lim_{s\downarrow 0}\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}}p(\boldsymbol{x},s)-r(\boldsymbol{y})\sqrt{(\pi BC_v)}$ となる．ここに $r(\boldsymbol{y})=\lim_{s\downarrow 0}\sqrt{(s)}\,\frac{\partial p}{\partial n}(\boldsymbol{y},s)$ である．特に，圧力境界では境界値が有界である限り $\partial p/\partial n$ は $1/\sqrt{s}$ の特異性を有し，非排水境界に於いては，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}}\lim_{s\downarrow 0}p(\boldsymbol{x},s)=\lim_{s\downarrow 0}\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}}p(\boldsymbol{x},s)$ $(\boldsymbol{y}\in\partial D,\ \boldsymbol{x}\in D)$ が成立つ．4) 実用上 g に関するデータは0であると思ってよい．従って，1)で述べた解釈によって初期の場を求め，求まった p を非排水境界での初期値と思って補間により「積分方程式法」を適用してもよい．

文献 [1] Predeleanu, M., In; Boundary Element Method (Proc. 3rd Int. Seminar, Irvine), P325, Springer, 1981. [2] Onishi, K. et al., 応力連合講概集, P199, 1981. [3] 西村, 小林, 土質工学会講演集, 1982.