

東北大学工学部 正員 岸野佑次

1. まえがき 粒状体の変形の特徴は粒状体を構成している粒子自身の変形が剛体的であることから、必然的に粒子間相対変位が生じ、これに伴って粒子間摩擦によるエネルギー散逸やダイレイタンスが生じる場所にある。Roscoeら<sup>1)</sup>は粒状体における散逸エネルギー増分が平均応力と平均剪断歪の積に比例するという仮定の下にダイレイタンス特性を表す応力比-歪増分比関係式を導いている。この仮定は、粒状体内部の摩擦の機構について考察した場合に、第一近似としては認められるが、一般には正確な現象の把握とはなっていないと考えられる。本文はこのような観点から、より正確な散逸エネルギーの把握を行うとともに、歪増分比に着目して降伏条件の考察を行ったものである。

## 2. 粒状体における散逸エネルギー

### 2-1 平均的剪断変形に伴う散逸エネルギー<sup>2)</sup>

本文においては、粒状体の散逸エネルギーとして、粒子間摩擦によるもののみを対象とする。図-1を参照して、二粒子A, B間において散逸するエネルギーは  $\mu (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{D}\mathbf{u}|$  ( $\mu$ : 摩擦係数) である。いま、粒状体における応力を  $\sigma_{ij}$ 、歪増分を  $D\varepsilon_{ij}$  とおけば、 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 、 $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$  は、それぞれ“平均的”に、

$$\sigma_n = n_i n_j \sigma_{ij} \quad (1)$$

$$D\delta_n = \sqrt{(n_i n_j \delta_{nkl} - n_i n_j n_k n_l) D\varepsilon_{ij} D\varepsilon_{kl}} \quad (2)$$

に比例した量である。粒状体内部の異質性や摩擦係数の不均一性を無視し、応力と歪増分テンソルの主軸が一致する場合を考えると、単位体積当たりの平均的散逸エネルギーは次式で与えられる。

$$\overline{DW_p} = \frac{\kappa}{2\pi} \int_A \sigma_n D\delta_n d\alpha \approx \kappa \left\{ \frac{7+\nu^2}{4\sqrt{3+\nu^2}} p + \frac{23\mu+57\nu-7\mu\nu^2-9\nu^3}{240\sqrt{(3+\mu^2)(3+\nu^2)}} g \right\} D\delta \quad (3)$$

ここに、 $\kappa$ は摩擦係数に関連した定数であり右辺は $\nu$ の3次の項までを考慮した単位球面上の積分値<sup>4)</sup>、また、

$$\mu = (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1) / (\sigma_3 - \sigma_1) \quad (4)$$

$$\nu = (2D\varepsilon_2 - D\varepsilon_3 - D\varepsilon_1) / (D\varepsilon_3 - D\varepsilon_1) \quad (5)$$

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \quad (6)$$

$$g = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / \sqrt{2} \quad (7)$$

$$D\delta = \sqrt{2} \sqrt{(D\varepsilon_1 - D\varepsilon_2)^2 + (D\varepsilon_2 - D\varepsilon_3)^2 + (D\varepsilon_3 - D\varepsilon_1)^2} / 3 \quad (8)$$

### 2-2 不均一性を考慮した散逸エネルギー<sup>3)</sup>

前項の散逸エネルギーの外に、不均一な変形に基づく散逸エネルギー  $\Delta(DW_p)$  は以下に示すように有限な値をもつと考えられる。図-1a  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 、 $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$  について、(1)、(2)式に比例する部分からの残差を  $\Delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 、 $\Delta |\mathbf{D}\mathbf{u}|$  とおくと、 $\Delta(DW_p)$  は  $\mu \Delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \Delta |\mathbf{D}\mathbf{u}|$  を考えている粒状体の内部領域に含まれる全2の粒子について合計することにより求められる。ここで、滑りの難易を統計的に考察すると、拘束力  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  が大きい程接点における滑り  $|\mathbf{D}\mathbf{u}|$  は小さい。即ちこれを残差で示せば、確率的に  $\Delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) > 0$  なら  $\Delta |\mathbf{D}\mathbf{u}| < 0$  である。同様に、 $\Delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) < 0$  なら  $\Delta |\mathbf{D}\mathbf{u}| > 0$  となり、このことから  $\Delta(DW_p) < 0$  即ち  $\Delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})$  と  $\Delta |\mathbf{D}\mathbf{u}|$  は負の相関を示すと考えられる。粒状体の簡単なモデル実験の結果によれば、変形分散の平方根は平均値とほぼ比例関係にあり、平均的に  $\Delta |\mathbf{D}\mathbf{u}| \propto D\delta$  と考えられる。同様に  $\Delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \propto p$  と仮定することは妥当であると考えられる。よって、次式を仮定する。

$$DW_p = \overline{DW_p} + \Delta(DW_p) = \overline{DW_p} - \lambda p D\delta \quad (\lambda: \text{定数}) \quad (9)$$

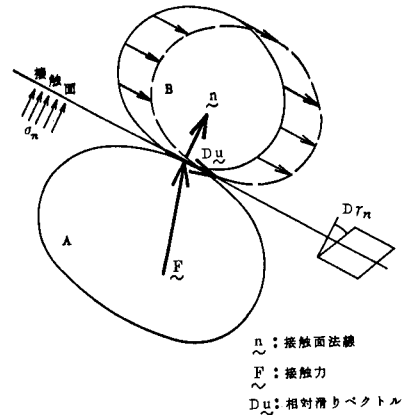


図-1 粒子間の相対変位

### 3. エネルギー保存則と降伏条件

体積差  $D\varepsilon_v$ , 平均剪断歪  $D\gamma$  に対応する仕事増分は

$$DW = p D\varepsilon_v + \frac{3 + \mu\nu}{\sqrt{(3 + \mu^2)(3 + \nu^2)}} \gamma D\gamma \quad (10)$$

であるので,  $DW = DW_p$  より次式を得る.

$$\frac{\gamma}{p} = M(\mu, \nu) - N(\mu, \nu) \frac{D\varepsilon_v}{D\gamma} \quad (11)$$

$$N(\mu, \nu) = \frac{240 \sqrt{(3 + \mu^2)(3 + \nu^2)}}{240(3 + \mu\nu) - K(23\mu + 57\nu - 7\mu\nu^2 - 9\nu^3)} \quad (12)$$

$$M(\mu, \nu) = N(\mu, \nu) \left( \frac{K(7 + \nu^2)}{4\sqrt{3 + \nu^2}} - \lambda \right) \quad (13)$$

ここで, 粒状体の降伏条件を次のように仮定する.

$$D\varepsilon_v/D\gamma = -g(p) \quad (g \text{ は } \pi \text{ 平面では定数}) \quad (14)$$

この条件式の  $\pi$  平面における形状を (11) 式より定めるためには, 少なくとも軟化を含まないような載荷過程において,

すなわち,  $\gamma/p$  を最小とするような  $\mu \sim \nu$  関係を見出せば良いと考えられる.  $\mu = \text{const}$  線に沿って,

$$\frac{\partial(\frac{\gamma}{p})}{\partial\nu} = 0 \quad (15) \quad \text{より,} \quad \mu = \frac{480\nu + K(133 - 82\nu^2 - 3\nu^4)}{16(35 - 5\nu^2 + 3K\nu)} \quad (16)$$

を得る. (11) 式と (16) 式は, いわゆる応力比-歪増分比関係を与える. 図-2 に  $\pi$  平面における降伏曲線の例を示す. 三軸圧縮応力状態 ( $\mu=1$ ) および三軸伸張応力状態 ( $\mu=-1$ ) における  $\frac{\gamma}{p}$  の値を  $(\frac{\gamma}{p})_c$ ,  $(\frac{\gamma}{p})_t$ , 内部摩擦角を  $\phi$  とおく. 本文の降伏条件がこれらの応力状態において Mohr-Coulomb の条件に一致するためには,

$$\left(\frac{\gamma}{p}\right)_c = \frac{2 \sin \phi}{1 - \frac{1}{3} \sin \phi} = \frac{K - \lambda}{1 - \frac{1}{15} K} \quad (17) \quad \left(\frac{\gamma}{p}\right)_t = \frac{2 \sin \phi}{1 + \frac{1}{3} \sin \phi} = \frac{K - \lambda}{1 + \frac{1}{15} K} \quad (18)$$

より,  $K = 5 \sin \phi$ ,  $\lambda = 3 \sin \phi$  を得る. このことから, 本文における降伏条件を決定するために必要なパラメータは  $K, \lambda$  の2個であるが, Mohr-Coulomb の条件と合せるならば  $\phi$  のみということになる. また, 歪硬化を考慮するためには (14) 式の右辺を  $g(p, \delta)$  とおいてこの関数形は別途定める必要がある.

次に,  $\mu = -1$  ( $\nu = -1$ ) 線上に沿う塑性ポテンシャル関数を求める. 塑性変形における安定性の条件

$$dp D\varepsilon_v + d\gamma D\gamma = 0 \quad (19) \quad d = \frac{3 + \mu\nu}{\sqrt{(3 + \mu^2)(3 + \nu^2)}} \quad (20)$$

と (11) 式より次の方程式を得る.

$$\frac{d\gamma}{dp} = a \frac{\gamma}{p} - b \quad (21) \quad \text{すなわち,} \quad a = 1 - \frac{K(23\mu + 57\nu - 7\mu\nu^2 - 9\nu^3)}{240(3 + \mu\nu)} \quad (22) \quad b = \frac{\{K(7 + \nu^2) - 4\lambda\sqrt{3 + \nu^2}\}\sqrt{3 + \mu^2}}{4(3 + \mu\nu)} \quad (23)$$

(21) 式の解は,  $p_0$  において  $\gamma=0$  における  $p$  の値とすれば,  $a \neq 1$  に対して次式により与えられる.

$$\frac{\gamma}{p} = \frac{b}{1-a} \left\{ \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1-a} - 1 \right\} \quad (24)$$

4. あとがき 本文において粒状体の散逸エネルギーは (接触力の平均値)  $\times$  (滑り量の平均値) ではなく, (接触力  $\times$  滑り量) の平均値として求められるべきであることを述べた. このような観点に立てば, 微視的に不均一な接触力や滑り量の変動部分も散逸エネルギーに関与することは興味深いことである. また, (14) 式のようなガイレイタンシーに対して降伏条件を与えることは, 少なくとも等歪状態に対して妥当なことではないかと思われる.

参考文献 1) Schofield, A and Wroth, P. (1968): Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill 2) 岸野 (1981): 土の力学 土質工学 36 3) 岸野 (1981) 第31回応力学会講演会 D15, 4) 岸野 (1982): 粒状体力学的構成に關する研究 (総合 (B) 報告書, 代筆者佐武正雄) pp 97 ~ 116