

1. ま え が き 固体粒子の集合体である粒状体の力学構成においては、二つの粒子の接触方向を示す接触法線 n_i の空間分布を示す量が重要な役割をもっている。本文は、このような量としてファブリックテンソル φ_{ij} を導入し、 φ_{ij} に対応する確率密度関数を求める方法を説明し、また φ_{ij} を用いて粒状体力学における応力テンソルの性質について考察する。

2. ファブリックテンソルと確率密度関数 粒状体を構成する固体粒子は、一般的には種々の大きさ・形状をもつものであるが、本文では、理論構成の単純化のため、等しい半径の円(または球)とし、主として2次元の場合について説明する。

われわれは粒状体の内部に適当な大きさの領域 R を考え、 R 内には統計的処理を行うのに十分な数の粒子が含まれており、かつ R 内の接触点における接触力・相対変位は、それぞれ R で定義される(平均的な)応力・ひずみテンソル σ_{ij} , ϵ_{ij} によって表現できるものとする。まず、 R 内の接触法線 n_i について

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2n} \sum_R n_i n_j \quad (2.1)$$

を考えよう。ここに、 n は R における接触点の総数、したがって、 $2n$ は接触法線の総数である。^{*} よって、 φ_{ij} は R における $n_i n_j$ の平均と考えることができる。 φ_{ij} を R におけるファブリックテンソルと呼ぶことにする。 n は十分に大きい数としているので、 R における n_i の確率密度関数 $f(\theta)$ ($\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$) を用い

$$\varphi_{ij} = \int_0^{2\pi} f(\theta) n_i n_j d\theta \quad (2.2)$$

と記すことができる。ここに、 θ は φ_{ij} の第1主軸からはかった n_i の傾角である。

φ_{ij} は、定義から明らかなように対称テンソルであり、 $\varphi_{ii} = 1$ が成立する。また、偏差部分は粒子配列の異方性に対応するので φ_{ij} を構造異方性テンソルと呼ぶこともある。また、 φ_{ij} の主値を φ_1, φ_2 ($\varphi_1 \geq \varphi_2$) とし、 $\lambda = \sqrt{\varphi_1/\varphi_2}$ によって構造の異方性を示すこともある。この場合、 λ は構造異方度と呼ばれる。

密度関数 $f(\theta)$ を与えれば、これに対応するファブリックテンソル φ_{ij} は式(2.2)によって一意的に決定される。しかし、 φ_{ij} を与えた場合、これに対応する密度関数は一意的には定まらないことに注意する。以下に、この密度関数を求める方法について考察する。

いま、一般に一つの方向を示す単位ベクトル n_i (傾角 θ) に対して、一つのベクトル $v_i = v_i(\theta)$ が対応する場合を考え、トレース1の対称テンソル

$$\psi_{ij} = \int_0^{2\pi} v_i v_j d\theta / \int_0^{2\pi} v_k v_k d\theta \quad (2.3)$$

を導入する。 v_i の方向を示す単位ベクトルを n'_i 、その傾角を θ' (θ' は必ずしも θ と一致しない) とすれば、

$$\psi_{ij} = \int_0^{2\pi} f(\theta') n'_i n'_j d\theta' \quad (2.4) \quad f(\theta') = \frac{v_i v_i}{\int_0^{2\pi} v_j v_j d\theta} \frac{d\theta}{d\theta'} \quad (2.5)$$

と記すことができる。 $f(\theta')$ は n'_i の確率密度関数と考えることができ、 ψ_{ij} は式(2.4)の意味で $n'_i n'_j$ の平均となっているので、 $\psi_{ij} = \langle n'_i n'_j \rangle$ と記すことにする。とくに v_i が一つの対称な定テンソル a_{ij} による写像 $v_i = a_{ij} n_j$ によって与えられる場合には、式(2.3)より次式が成立する。

* 二つの粒子の接触方向を表す接触法線として、二つの粒子のそれぞれについて外向き単位法線となるもの(互に逆向き)を考えるので、1個の接触点について2個の接触法線が対応することに注意する。

$$\langle n'_i n'_j \rangle = \frac{\alpha_{ip} \alpha_{jp} \int_0^{2\pi} n_p n_p d\theta}{\alpha_{in} \alpha_{jn} \int_0^{2\pi} n_n n_n d\theta} = \frac{\alpha^2_{ij}}{\alpha^2_{nn}} \quad (2.6)$$

したがって、 α_{ij} として $\varphi^{\frac{1}{2}}_{ij}$ を用いれば、

$$\langle n'_i n'_j \rangle = \frac{\varphi_{ij}}{\varphi_{nn}} = \varphi_{ij} \quad (2.7)$$

となる。この場合、 φ_{ij} を与える密度関数として、

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\varphi_1 \varphi_2)^{\frac{3}{2}}}{(\varphi_2 \cos^2 \theta + \varphi_1 \sin^2 \theta)^2} \quad (2.8)$$

を得る。図-1は、式(2.8)で与えられる密度関数の形状を図示

図 - 1

したものであるが、粒状体の2次元モデルに関する実験から得られる接触角分布図の形状とよく適合するように思われる。なお、3次元の場合についても同様にして密度関数を得ることができる。¹⁾

3. 応力テンソルに関する考察 粒状体における応力テンソルは、接触力 F_i と接触法線 n_i を用い、

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{\dot{n} \cdot 2\pi a} \sum_n n_i F_j \quad (2 \text{ 次元}), \quad \frac{3}{\dot{n} \cdot 4\pi a^2} \sum_n n_i F_j \quad (3 \text{ 次元}) \quad (3.1)$$

と定義することができる。ここに、 $\dot{n}$ はRにおける粒子の個数、 a は平均粒径である。逆に、 F_j は

$$F_j = \frac{2\pi a}{N} n_i \sigma^*_{ij} \quad (2 \text{ 次元}), \quad \frac{4\pi a^2}{N} n_i \sigma^*_{ij} \quad (3 \text{ 次元}) \quad (3.2)$$

と表現できると仮定する。ここに、 N は配位数(coordination number)、すなわち粒子1個当りの平均接触点数、また σ^*_{ij} と記したのは、粒状体においては連続体の場合と異なり、式(3.1)と(3.2)とで同一の応力テンソルを用いることができないからである。式(3.2(2次元))を式(3.1)に代入し、式(2.1)を用いれば、

$$\sigma_{ijk} = \frac{1}{\dot{n}} \sum_n n_i n_j \sigma^*_{ijk} = 2\varphi_{ij} \sigma^*_{ijk} \quad (2 \text{ 次元}), \quad 3\varphi_{ij} \sigma^*_{ijk} \quad (3 \text{ 次元}) \quad (3.3)$$

を得る。ここで、 $N = 2\dot{n}/\dot{n}$ の関係式を用いている。また、式(3.3)から、逆に

$$\sigma^*_{ijk} = \frac{1}{2} \varphi^{-1}_{ij} \sigma_{ijk} \quad (2 \text{ 次元}), \quad \frac{1}{3} \varphi^{-1}_{ij} \sigma_{ijk} \quad (3 \text{ 次元}) \quad (3.4)$$

を得る。粒状体においては、 σ_{ijk} を応力テンソル、 σ^*_{ijk} を副応力テンソルと呼ぶことにする。副応力テンソル σ^*_{ijk} は、ファブリックテンソル φ_{ij} と σ_{ijk} の主軸が一致しない限り、一般に対称とはならない。

粒状体モデルに関する実験の結果によれば、応力 σ_{ijk} によって、粒状体のファブリックには誘導異方性が生じ、塑性硬化の過程ではその異方度が σ_{ijk} の異方度に近づくことが知られている。このことから、誘導異方性を $\varphi_{ijk} = \sigma_{ijk} / \sigma_{nn}$ と仮定すれば、次式を得る。

$$\sigma^*_{ij} = p \delta_{ij}, \quad p = \frac{\sigma_{ii}}{2} \quad (2 \text{ 次元}), \quad \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (3 \text{ 次元}) \quad (3.5)$$

$$F_i = \frac{2\pi a}{N} p n_i \quad (2 \text{ 次元}), \quad \frac{4\pi a^2}{N} p n_i \quad (3 \text{ 次元}) \quad (3.6)$$

これらの式より、粒状体は応力をうけると最も有効に応力を伝達するように内部のファブリックが変化し、この性質が粒状体の誘導異方性と呼ばれるものとなって現われることがわかる。

4. あとがき 本文で導入したファブリックテンソルや副応力テンソルを用いることにより、粒状体の力学構成の内容を明確に記述できると思われる。ファブリックテンソルと変形との関係や粒径・形状の差異を考慮した解析などについて、さらに研究をすすめたいと考えている。