III－1　　最大仕事と垂直性に関する双対原理

東北大学工学部　正員　新関　茂

1) まえがき

自然界における現象の最大・最小性は個々の材料特性とは無関係に，自然現象の安定性から生じるものであると考えられる．このような観点から，著者は熱力学の主法則（第1及び第2法則）を基礎とし，非平衡過程に関する一連の変分不等式を定式化すると同時に，それらの応用を行って来た[1)-4)]．本文は，これらの変分不等式により，双対最大仕事原理及び双対垂直性原理を定式化し，粒状体力学などへの応用について説明したものである．

2) 双対最大仕事原理

物体内部に，熱源がない断熱過程で，微小変形理論が適用可能な場合，密度をρ，単位質量当たりの内部エネルギーをe，応力テンソルをσ_{ij}，歪テンソルをε_{ij}とすれば，非平衡過程に対する変分不等式（安定条件）は

$$\rho\dot{e} \geq \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (2.1)$$

と記される．上式は任意の安定な摂動状態に対して成立し，無摂動状態に対しては熱力学才1法則により，当然等号となる．その誘導過程から，不等式(2.1)の適用範囲は，熱力学の主法則と同等であると考えられる．

今，正解とは異なる任意の（任意の摂動を含む）単位質量当たりの内部エネルギー，応力及び歪テンソルをそれぞれe^*，σ^*_{ij}，ε^*_{ij}，また，これらの正解（真の値又は摂動を含まない値）をe，σ_{ij}，ε_{ij}で表わせば，安定状態に対して，式(2.1)より

$$\rho\dot{e} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \geq \sigma^*_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (2.2)$$

$$\rho\dot{e} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \geq \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij} \qquad (2.3)$$

が成立し，これらより，次の2つの不等式が得られる．

$$(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij} \geq 0 \qquad (2.4)$$

$$(\dot{\varepsilon}_{ij}-\dot{\varepsilon}^*_{ij})\sigma_{ij} \geq 0 \qquad (2.5)$$

不等式(2.4)は，最大塑性仕事原理の一般の場合への拡張であり，式(2.5)は，最大補足仕事の原理と呼ぶべきもので，(2.4)とは双対な関係にある．不等式(2.4)は，正解σ_{ij}とは異なる任意のσ^*_{ij}に対して，成立するから，σ^*_{ij}を時間$(t-\Delta t)$における応力テンソルとし，σ_{ij}，$\dot{\varepsilon}_{ij}$はそれぞれ時間tにおける応力及び歪速度テンソルであるとすれば不等式(2.4)より

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\sigma_{ij}(t)-\sigma_{ij}(t-\Delta t)\right]\dot{\varepsilon}_{ij}(t) \geq 0 \qquad (2.6)$$

が成立し，更に上式は

$$\dot{\sigma}_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t) \geq 0 \qquad (2.7)$$

と書き換えられる．塑性論におけるDruckerの安定条件は，上述の特別な場合に相当する．同様に，不等式(2.5)からは

$$\sigma_{ij}(t)\ddot{\varepsilon}_{ij}(t) \geq 0 \qquad (2.8)$$

が得られる．これは式(2.7)と双対な関係にある安定条件である．式(2.7)は式(2.4)に式(2.6)のような時間に関する制約を与えることによって導びかれたものであるから，式(2.4)よりも強い拘束を受けた（成立範囲の狭い）形式である．(2.8)についても同様である．

3) 双対垂直性原理

前節で定式化した双対不等式(2.7),(2.8)を用いて，双対垂直性原理を誘導する．単位時間当たりの仕事量が一定の条件は

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = C\ (\text{定数}) \qquad (3.1)$$

で与えられる．上式の両辺を時間tで微分すれば

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij}\ddot{\varepsilon}_{ij} = 0 \qquad (3.2)$$

不等式(2.7),(2.8)の制約の下に上式が成立するのは

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \qquad (3.3)$$

$$\sigma_{ij}\ddot{\varepsilon}_{ij} = 0 \qquad (3.4)$$

の場合に限られる．式(3.3)と(3.4)は，互いに双対な関係にある垂直性原理である．

4) 双対散逸ポテンシャル

本節では，散逸性連続体の場合に限定して説明する．エントロピー生成率を$_i\dot{S}$，絶対温度をθとして，非平衡熱力学で用いられる一般的方法に従い，σ_{ij}と$\dot{\varepsilon}_{ij}$にそれぞれ対応する一般化力X_i及び一般化流れJ_iを導入すれば，純粋に散逸的な連続体に対して，不等式(2.1),(2.4),(2.5),(2.7),(2.8),垂直性原理(3.3),(3.4)は

$$\rho\theta\,{}_i\dot{S} \geq X_iJ_i \qquad (4.1)$$

$$(X_i-X^*_i)J_i \geq 0 \qquad (4.2)$$

$$(J_i-J^*_i)X_i \geq 0 \qquad (4.3)$$

$$\dot{X}_iJ_i \geq 0 \qquad (4.4)$$

$$X_i\dot{J}_i \geq 0 \qquad (4.5)$$

$$\dot{X}_iJ_i = 0 \qquad (4.6)$$

$$X_i\dot{J}_i = 0 \qquad (4.7)$$

と書き換えられる．X_iとJ_iの間の現象論的関係式は，一般に

$$X_i = M_{ij}(\mathbf{J})J_j \qquad (4.8)$$

$$J_i = N_{ij}(\mathbf{X})X_j$$

と記され，散逸関数Dは

$$D=\theta_i\dot{S}=X_iJ_i=M_{ij}(\mathbf{J})J_iJ_j=N_{ij}(\mathbf{X})X_iX_j \qquad (4\cdot10)$$

によって与えられる。右図を参照して，Legendre変換

$$\varphi+\psi=X_iJ_i \qquad (4.11)$$

を満足するJ_i及びX_iの関数

$$\varphi=\hat{\varphi}(\mathbf{J}) \qquad (4.12)$$

$$\psi=\hat{\psi}(\mathbf{X}) \qquad (4\cdot13)$$

を導入する。式(4·11)より

$$\delta\varphi+\delta\psi=\delta X_iJ_i+X_i\delta J_i \qquad (4.14)$$

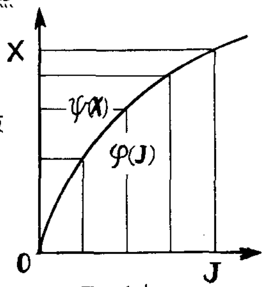

図-4·1

式(4·12)(4·13)に注意して，上式を書き換えれば

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial J_i}-X_i\right)\delta J_i+\left(\frac{\partial\psi}{\partial X_i}-J_i\right)\delta X_i=0$$

上式は任意のδJ_i, δX_iの組合せ（すなわち任意の材料）に対して成立しなければならないから，

$$X_i=\partial\varphi/\partial J_i \qquad (4\cdot16),\qquad J_i=\partial\psi/\partial X_i \qquad (4.17)$$

$\varphi=C'$（定数）の場合について考えれば，式(4·16)を用いて

$$\dot{\varphi}=(\partial\varphi/\partial J_i)\dot{J}_i=X_i\dot{J}_i=0$$

同様に　$\dot{\psi}=(\partial\psi/\partial X_i)\dot{X}_i=\dot{X}_iJ_i=0$

であり，式(4.6),(4.7)と同一の結果を得る。式(4.16)(4.17)によって，散逸性連続体における一般化力X_i，及び一般化流れJ_iを与える関数φ. ψは一般に散逸ポテンシャルと呼ばれ，互に双対な関係にある。

5）粒状体力学への応用

粒状体の研究においては，度々，塑性理論からの結果が適用され，最大塑性仕事原理を根拠に，降伏曲面に対する速度ベクトルJ_i($\dot{\varepsilon}_{ij}$)の垂直性が応用されることがあるが，前節で説明したように，最大仕事原理から導びかれる速度ベクトルJ_iの垂直性は散逸ポテンシャルψ=一定の曲面に対するものであり（ただし，von Misesの降伏曲面はψと相似であり，容易にJ_iと直交することが証明できる），また，一般には散逸関数D=一定の曲面に対してもJ_iの垂直性は成立しない。

安定条件$\delta X_i\delta J_i\geq 0$[1)4)]により，散逸関数及び散逸ポテンシャルについては$\delta^2D\geq0$, $\delta^2\varphi\geq0$, $\delta^2\psi\geq0$が成立し，凸関数となっているが，降伏関数については，D, φ, ψのいずれかと一致するか又は相似でない限り，凸関数性は保証されないことになる。垂直性原理(3.3)又は(4·6)を応力比-歪増分比関係式と連立させ，応力で表現されたポテンシャル関数が度々求められているが，更に垂直性原理(3.4)又は(4·7)を応用して歪増分の関数としてポテンシャル関数を求めることも可能である。

6）考察

6·1）最大及び最小仕事率の原理について

周知のように，最大塑性仕事原理は，真の仕事率は摂動を含むいかなる場合の仕事率よりも大きいことを述べている。一方Prigogine[5)]は線形な定常状態に対し，エントロピー生成率最小の原理（=最小仕事の原理）が成立することを示しており，これらは互いにパラドックスとなっている。このような例は他の分野にも幾つか存在し，現在なお未解決のままである[6)]。次に，このパラドックスの解決方法について簡単に説明する。2)において，内部エネルギー変化率（内部仕事率）$\dot{e}$は真の値をとり，外的仕事率のみが摂動を含むという条件の下に双対最大原理を導びいた。今，逆に，外的仕事率は，真の値となっているが，内部エネルギー変化率$\dot{e}$は摂動を含むとすれば，式(2.1)より

$$\rho\dot{e}^*\geq\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=\rho\dot{e} \qquad (6.1)$$

となる。上式は真の内部仕事率の最小性を表現している。すなわち不等式(2.1)そのものが，上記パラドックスの説明となっている。不等式(4·1)や，熱移動などを含む更に一般的な場合についても，全く同様である。

6.2）Zieglerの理論との関係について

Ziegler[7)8)]は，塑性ポテンシャル理論を拡張して，垂直条件及び最大仕事原理などの誘導を行っている。すなわち散逸関数$D(\mathbf{J})=X_iJ_i$より，X_iを

$$X_i=\nu(\partial D/\partial J_i) \qquad (6.2)$$

ただし，$\nu=D\left(\frac{\partial D}{\partial J_i}J_i\right)^{-1}$ (6.3)

として導びき，X_iのD=一定の曲面に対する垂直性を主張している。　今h_{ij}, h_{ijk}, h_{ijk}を定係数として

$$X_i=h_{ij}J_j+h_{ijk}J_jJ_k+h_{ijkl}J_iJ_kJ_l+\cdots\cdots \qquad (6.4)$$

とおけば，定義により

$$D=h_{ij}J_iJ_j+h_{ijk}J_iJ_jJ_k+h_{ijkl}J_iJ_jJ_kJ_l+\cdots\cdots \qquad (6.5)$$

である。$h_{ij}=h_{ji}$, $h_{ijk}=h_{jik}=\cdots=h_{kji}$などの対称性が成り立つとして式(6.2)(6.3)(6.5)より

$$X_i=\frac{h_{ij}J_iJ_j+h_{ijk}J_iJ_jJ_k+\cdots}{2h_{ij}J_iJ_j+3h_{ijk}J_iJ_jJ_k+\cdots}(2h_{ij}J_j+3h_{ijk}J_jJ_k+\cdots) \qquad (6.6)$$

上式(6.6)が原式(6.4)に一致するのはDがJ_iの同次関数の場合だけであり，このときD=一定の曲面は散逸ポテンシャルφ=一定の曲面と相似である。すなわち，Zieglerの理論はDがJ_iの同次関数の場合にだけ成立し，一般的には適用できない。

参考文献　(1) 新関・佐武：土木学会第35回年次学術講演会講演概要集，I，pp.1-2，1980 (2) 新関，佐武：同上，III，pp.5-6，1981 (4) Niiseki, S.: Proc. of 4th Int. Sym. on Finite Element Methods in Flow Problems, 1982 (to appear) (5) Glansdorff, P. & Prigogine, I.（松本，竹山訳）：構造・安定性・ゆらぎ，その熱力学的理論，みすず書房，1977，pp.32-33 (6) Sawada, Y.: Progress of Theoretical Physics, Vol.66 No.1 pp.68-76，1981 (7) Ziegler, H.: Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids, ed by H. Parkus and L. I. Sedov, Springer, 1968 pp.411-424 (8) Ziegler, H.; An Introduction to Thermomechanics North-Holland, 1977, pp.239-245,