

II-441 二段階陽的有限要素法による海浜流の解析

中央大学 学生員 ○櫻山 和男
中央大学 正 員 川原 睦人

1. はじめに

本報告は、海浜流の数値シミュレーションの一解法として、有限要素法による方法を提案するものである。この方法は、空間方向には、任意形状への適合性から三節点三角形の要素を用いた有限要素法で離散化し、時間方向には、逐次時間積分法で離散化するものである。

2. 基礎方程式

図-1の構成に従って、波向きと波数の連続式に非回転の条件を導入した次式から求める。

$$k_i + C_{gj} k_{i,j} + f h_{,i} = 0 \quad (1)$$

ここで、 k_i : 波数, $C_{gj} = 20/2h$, $f = 20/2h$, h : 水深である。

次に、波高分布を波のエネルギー保存式から求める。

$$\dot{E} + (E C_{gi})_{,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 E : 波のエネルギー, C_{gi} : 群速度である。

以上、(1)、(2)式から得られた波向き及び波高分布からラジエーションストレスの分布を求め、海浜流の計算を行う。海浜流は、次に示す連続式及び運動方程式から求める。

$$\bar{L}_i + \{(\bar{h} + \bar{L}) u_i\}_{,i} = 0 \quad (3)$$

$$u_i + u_j u_{i,j} + g \bar{L}_{,i} + \frac{S_{ij}}{\rho(\bar{h} + \bar{L})} + \frac{C_b}{\bar{h} + \bar{L}} u_i - A_e (u_{i,j} + u_{j,i}) = 0 \quad (4)$$

ここで、 u_i : 平均流速, $\bar{L}$: 水位, g : 重力加速度, S_{ij} : ラジエーションストレス, C_b : 海底摩擦係数, A_e : 渦動粘性係数である。

3. 有限要素法

重み付き残差法の手順に従い、(1)式に重み関数 k_i^* , (2)式に E^* , (3)式に $\bar{L}^*$, (4)式に u_i^* をかけ、解析領域 V で積分すると、次の重み付き残差方程式が得られる。なお、運動方程式の粘性項は Gauss の発散定理を用いて部分積分を行う。

$$\int_V (k_i^* k_i) dV + \int_V (k_i^* C_{gj} k_{i,j}) dV + \int_V (k_i^* f h_{,i}) dV = 0 \quad (5)$$

$$\int_V (E^* \dot{E}) dV + \int_V (E^* E_{,i} C_{gi}) dV + \int_V (E^* E C_{gi,i}) dV = 0 \quad (6)$$

$$\int_V (\bar{L}^* \dot{\bar{L}}) dV + \int_V (\bar{L}^* h_{,i} u_i) dV + \int_V (\bar{L}^* h u_{i,i}) dV + \int_V (\bar{L}^* g u_{i,i}) dV + \int_V (\bar{L}^* g u_{i,i}) dV = 0 \quad (7)$$

$$\int_V (u_i^* u_i) dV + \int_V (u_i^* u_j u_{i,j}) dV + g \int_V (u_i^* \bar{L}_{,i}) dV + \int_V \left\{ \frac{u_i^*}{\rho(\bar{h} + \bar{L})} S_{ij,j} \right\} dV + \int_V \left(\frac{u_i^* C_b}{\bar{h} + \bar{L}} u_i \right) dV + A_e \int_V (u_i^* u_{i,j} + u_{j,i} u_i) dV = A_e \int_V u_i^* \hat{L}_i dS \quad (8)$$

ここで、 $\hat{L}_i = (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j$ である。

次に、要素内の変数を面積座標による一次の形状関数を用いて、次式で近似する。

$$k_i^* = \bar{\phi}_\alpha k_\alpha^*, k_i = \bar{\phi}_\alpha k_\alpha, C_{gj} = \bar{\phi}_\alpha C_{gj}, f = \bar{\phi}_\alpha f, h = \bar{\phi}_\alpha h, E^* = \bar{\phi}_\alpha E_\alpha^*, E = \bar{\phi}_\alpha E_\alpha, \bar{L}^* = \bar{\phi}_\alpha \bar{L}_\alpha \quad (9)$$

$$\bar{L} = \bar{\phi}_\alpha \bar{L}_\alpha, u_i^* = \bar{\phi}_\alpha u_\alpha^*, u_i = \bar{\phi}_\alpha u_\alpha, \frac{S_{ij}}{\rho(\bar{h} + \bar{L})} = \bar{\phi}_\alpha \left\{ \frac{S_{ij}}{\rho(\bar{h} + \bar{L})} \right\}_\alpha, \frac{C_b u_i}{\bar{h} + \bar{L}} = \bar{\phi}_\alpha \left(\frac{C_b u_i}{\bar{h} + \bar{L}} \right)_\alpha$$

ここで、 $\bar{\phi}_\alpha$ は形状関数、 $k_\alpha^* \sim \left(\frac{C_b u_i}{\bar{h} + \bar{L}} \right)_\alpha$ は各有限要素における節点値である。(9)式を(5)~(8)式に代入し、解析領域全体で重ね合わせると、次の有限要素方程式が得られる。

$$M_{\alpha\beta} k_{\beta i} + K_{\alpha\beta j} C_{gj} + C_{\alpha\beta i} f_{\beta} h_{\beta} = 0 \quad (10)$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{E}_{\beta} + B_{\alpha\beta i} E_{\beta} C_{gi} + C_{\alpha\beta i} E_{\beta} C_{gi} = 0 \quad (11)$$

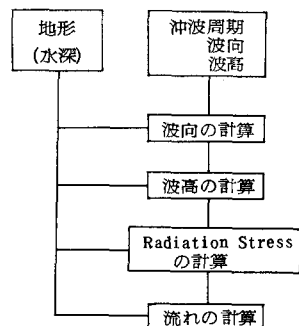


図-1 本手法の構成

$$M_{ap} \dot{U}_p + B_{apir} (h_p + \zeta_p) U_{ri} + C_{apri} (h_p + \zeta_p) U_{ri} = 0 \quad (12)$$

$$M_{ap} \dot{U}_i + K_{apri} U_{pj} U_{ri} + H_{api} \zeta_p + Q_{apj} \left(\frac{S_{ij}}{P(h + \zeta)} \right)_p + N_{ap} \left(\frac{C_{p} U_i}{h + \zeta} \right)_p + S_{apip} = \hat{\Omega}_a \quad (13)$$

4. 時間積分法

本手法は非定常解析のため、時間方向の処理が必要となる。

そこで、次式の二段階ラックスウエンドロフスキームを考えよう。

$$F(t + \Delta t/2) = F(t) + (\Delta t/2) \dot{F}(t) \quad (14)$$

$$F(t + \Delta t) = F(t) + \Delta t \dot{F}(t + \Delta t/2) \quad (15)$$

(10)~(13)式に、(14)、(15)式のアルゴリズムを適用すると次のようになる。

<第一段階>

$$\bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1/2} = \bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^n - (\Delta t/2) (K_{apri} C_{gpi} \dot{U}_{ri}^{n+1/2} + C_{apri} \dot{U}_{ri}^n) \quad (16)$$

$$\bar{M}_{ap} \dot{U}_{pj}^{n+1/2} = \bar{M}_{ap} \dot{U}_{pj}^n - (\Delta t/2) (B_{apir} E_{pj} C_{gri} + C_{apri} E_{pj} C_{gri}) \quad (17)$$

$$\bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1/2} = \bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^n - (\Delta t/2) (B_{apir} (h_p + \zeta_p) U_{ri}^{n+1/2} + C_{apri} (h_p + \zeta_p) U_{ri}^n) \quad (18)$$

$$\bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1/2} = \bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^n - (\Delta t/2) (K_{apri} U_{pj} U_{ri}^{n+1/2} + H_{api} \zeta_p + Q_{apj} \left(\frac{S_{ij}}{P(h + \zeta)} \right)_p + N_{ap} \left(\frac{C_{p} U_i}{h + \zeta} \right)_p + S_{apip} U_{ij}^n) \quad (19)$$

<第二段階>

$$\bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1} = \bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1/2} - \Delta t (K_{apri} C_{gpi} \dot{U}_{ri}^{n+1/2} + C_{apri} \dot{U}_{ri}^n) \quad (20)$$

$$\bar{M}_{ap} \dot{U}_{pj}^{n+1} = \bar{M}_{ap} \dot{U}_{pj}^{n+1/2} - \Delta t (B_{apir} E_{pj} C_{gri} + C_{apri} E_{pj} C_{gri}) \quad (21)$$

$$\bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1} = \bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1/2} - \Delta t (B_{apir} (h_p + \zeta_p) U_{ri}^{n+1/2} + C_{apri} (h_p + \zeta_p) U_{ri}^n) \quad (22)$$

$$\bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1} = \bar{M}_{ap} \dot{U}_{pi}^{n+1/2} - \Delta t (K_{apri} U_{pj} U_{ri}^{n+1/2} + H_{api} \zeta_p + Q_{apj} \left(\frac{S_{ij}}{P(h + \zeta)} \right)_p + N_{ap} \left(\frac{C_{p} U_i}{h + \zeta} \right)_p + S_{apip} U_{ij}^n) \quad (23)$$

ここで、 $\bar{M}_{ap}$ は質量行列の集中化を表わし、 $\hat{M}_{ap}$ は次のことを表わす。 $\hat{M}_{ap} = \alpha M_{ap} + (1 + \alpha) \bar{M}_{ap}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$)、 α :混合比。また、運動方程式の右辺第一項の質量行列を集中化することにより、人工粘性を取り去った。

5. 数値解析例

図-3に示す、理想的な海底地形をもつ自然海岸に本手法を適用する。図-2に要素分割図が示されており、要素総数1600、節点総数861である。計算条件として、境界C-Dから入射する波は周期10秒、波高1.0m、波向きは海岸線に対して直角に入射するとする。計算された屈折図と波高図が図-3、図-4に示されている。この結果のほかに、 $C_f = 0.01$ 、 $A_1 = 1.0 \text{ m/s}$ として計算した流況図が図-5に示されている。なお、境界条件は、A-Bで $u = v = 0.0$ 、B-Cで $u = 0.0$ 、C-Dで $u = v = 0.0$ 、A-Dで $u = 0.0$ である。二つの対称な循環流が形成されており、妥当な結果であるといえる。以上の計算において、微小時間増分量 $\Delta t = 0.4$ 秒、混合比 $\alpha = 0.8$ であった。

6. おわりに

差分法による海浜流の解析は、数多く行なわれているが、海岸形状などが複雑になる場合、有限要素法はその領域形状の適応性において、より良い手法となるであろう。

<謝辞>本研究を行うにあたり、多大な御助言を下された本学水口優助教授に対して深く感謝いたします。

参考文献 M.Kawahara, H.Hirano, K.Tsubota and K.Inagaki: "Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow", Int. Jour. Meth. Fluid., Vol.2, 1982, pp.89~112.

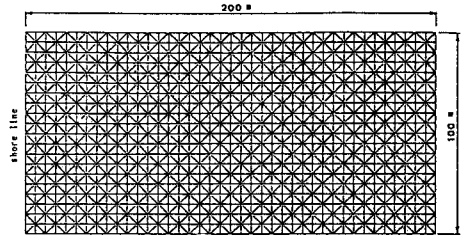


図-2 要素分割図

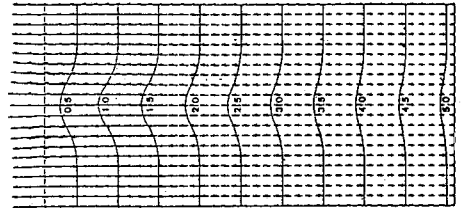


図-3 水深図と屈折図

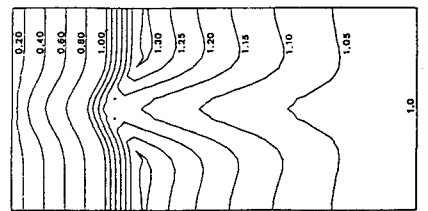


図-4 波高分布図

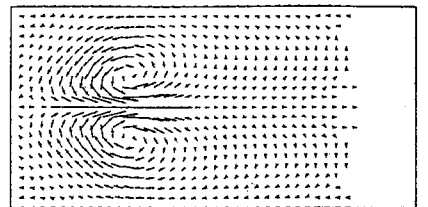


図-5 流況図