II-427　微小振幅波の浅水変形について　（２）

北海道大学工学部　正員　○浜中建一郎
三井造船　正員　加藤一之

1. まえがき

波の浅水変形に関する解析的研究で中間波の領域のものは比較的少なく、Keller[1], Biesel[2], Tlapa[3] 等があげられる。これらのうち、Keller, Biesel のものは任意の次数まで近似を進めることは困難であり、Tlapa のものは水底が一様勾配という制限がある。著者等はこれらの一般化として、ゆるやかではあるが任意に水深が変化する場合の浅水変形について、簡単な摂動展開を試み、その２次近似解を示した。[4]

ここでは、これまでの研究では波数が水深だけで決まるとしていたのに対し、波数も同時に摂動展開することにより、水底勾配やさらにその微系数にも依存することを示す。又近似を高めることにより内部の流速分布がより改善される様子も示す。

2. 摂動展開

有次元の変数を記号へを付して表わし、次の無次元化を行う。但し $\hat{g}$ は重力加速度、$\hat{\omega}$ は波動の周波数

$$(x, z) = (\delta\hat{x}, \hat{z})(\hat{\omega}^2/\hat{g}) \quad , \quad t = \hat{\omega}\hat{t}$$

$$\phi = (\hat{\omega}^3/\hat{g}^2)\hat{\phi} \; , \; (\eta, h) = (\hat{\eta}, \hat{h})(\hat{\omega}^2/\hat{g}) \; , \; \delta \ll 1$$

座標系は、x を水平, z を鉛直上向きにとる。ϕ は速度ポテンシャル、η は水面波形、h は水深。

基礎方程式は、線形２次元とし、

$$(1)\quad \begin{cases} \delta^2\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 & \\ \phi_{tt} + \phi_z = 0 & , z = 0 \\ \phi_z + \delta^2 h_x \phi_x = 0 & , z = -h \\ \eta = -\phi_t & , z = 0 \end{cases}$$

ここで解を

$$(2)\quad \phi = Ae^{i\theta} \; , \; \eta = Ye^{i\theta} \quad , \; \theta = \delta^{-1}\int k\,dx - t$$

と仮定し、(1)に代入すると

$$(3)\quad \begin{cases} A_{zz} - k^2 A + i\delta(2kA_x + Ak_x) + \delta^2 A_{xx} = 0 & \\ A_z - A = 0 & , z = 0 \\ A_z + h_x(i\delta kA + \delta^2 A_x) = 0 & , z = -h \\ Y = iA & , z = 0 \end{cases}$$

次に、A, Y, k を δ で、例へば

$$A = A^{(0)} + \delta A^{(1)} + \delta^2 A^{(2)} + \cdots$$

の様に各々展開し、(3)に代入し、δ の各オーダで方程式をまとめ低次から順に解く。

δ^0 のオーダでは前回[4]と全く同じである。又 δ^1 のオーダでは波数の変更は現われないため、結果的にはこれも前回と同じ解である。従って結果だけ記すと、

$$(4)\quad \begin{cases} A^{(0)} = -ia\cosh\gamma(z+h) \equiv -ia\cosh\alpha \\ Y^{(0)} = a\cosh\gamma h \equiv a\cosh\beta \\ k^{(0)} = \gamma \\ \gamma\tanh\gamma h = 1 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} A^{(1)} = (B_1\alpha^2 + B_2\alpha)\cosh\alpha + B_3\alpha\sinh\alpha \\ Y^{(1)} = i\{(B_1\beta^2 + B_2\beta)\cosh\beta + B_3\beta\sinh\beta\} \\ k^{(1)} = 0 \end{cases}$$

但し、$B_1 = -\dfrac{a\gamma_x}{2\gamma^2}$, $B_2 = -ah_x$, $B_3 = -\dfrac{a_x}{\gamma}$

エネルギーフラックスの保存則は δ^0 のオーダの解に適用されて[4]

$$(6)\qquad a^2(\sinh^2\beta + h)\gamma^2 = const.$$

により、振幅 a は定まる。

δ^2 のオーダでは方程式は

$$(7)\quad \begin{cases} A^{(2)}_{zz} - \gamma^2 A^{(2)} = 2\gamma k^{(2)}A - i\{\gamma_x A^{(1)} + 2\gamma A^{(1)}_x\} - A^{(0)}_{xx} & \\ A^{(2)}_z - A^{(2)} = 0 & , z = 0 \\ A^{(2)}_z + h_x(i\gamma A^{(1)} + A^{(0)}_x) = 0 & , z = -h \\ Y^{(2)} = iA^{(2)} & , z = 0 \end{cases}$$

同様に、(7.1), (7.3) から多少長い計算のあとで

$$A^{(2)} = (C_1\alpha^4 + C_2\alpha^3 + C_3\alpha^2 + C_4\alpha)\cosh\alpha + (C_5\alpha^3 + C_6\alpha^2 + C_7\alpha + C_8)\sinh\alpha$$

但し、$C_1 = P_1/8$, $C_2 = P_3/6$, $C_3 = (P_5 - P_2 + 3P_1/2)/4$
$C_4 = P_7/2 - (P_4 - P_3)/4$, $C_5 = P_2/6 - P_1/4$, $C_6 = (P_4 - P_3)/4$
$C_7 = P_6/2 - (P_5 - P_2 + 3P_1/2)/4$, $C_8 = -P_7/2 + (P_4 - P_3)/4 + i\dfrac{a_x h_x}{\gamma}$

ここで

$$P_1 = -\frac{i}{\gamma^2}2\gamma_x B_1$$

$$P_2 = -\frac{i}{\gamma^2}\{\gamma_x B_1 + 2(\gamma B_{1x} + 2\gamma_x B_1 + \gamma_x B_3) - a(\gamma_x/\gamma)^2\}$$

$$P_3 = -\frac{i}{\gamma^2}2(\gamma^2 h_x B_1 + \gamma_x B_2)$$

$$P_4 = -\frac{i}{\gamma^2}\{\gamma_x B_2 + 2\gamma^2 h_x(2B_1 + B_3) + 2(\gamma B_2)_x - 2a\gamma_x h_x\}$$

$$P_5=-\frac{i}{\gamma^2}\{\gamma_x B_3+2(\gamma B_3)_x+2\gamma^2 h_x B_2$$
$$-2a_x\gamma_x/\gamma-a\gamma_{xx}/\gamma\}$$
$$P_6=-\frac{i}{\gamma^2}\{2a\gamma k^{(2)}+2\gamma^2 h_x B_2-a_{xx}-a(\gamma h_x)^2\}$$
$$\equiv\quad P_6'-i2ak^{(2)}/\gamma$$
$$P_7=-\frac{i}{\gamma^2}\{2\gamma^2 h_x B_3-2a_x\gamma h_x-2a\gamma_x h_x-a\gamma h_{xx}\}$$

このオーダでは波数の補正が現われる。解を(7.2)に代入し $k^{(2)}$ を求めると

$$k^{(2)}=\frac{\gamma}{i2a}(P_1R_1+\cdots+P_5R_5+P_6'R_6+P_7R_7)/R_6+\frac{a_x\gamma h_x}{2a}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)/R_6 \tag{9}$$

但し

$$R_1=(2\gamma\beta^3+2h\beta^2-6\beta^2+3\gamma\beta+3h-3)/8$$
$$R_2=(2\gamma\beta^3/3-2h\beta^2/3+2\beta^2-\gamma\beta-h+1)/4$$
$$R_3=(\gamma\beta^2+h\beta-2\beta+1/\gamma)/4$$
$$R_4=(\gamma\beta^2-h\beta+2\beta-1/\gamma)/4$$
$$R_5=(\gamma\beta+h-1)/4$$
$$R_6=(\gamma\beta-h+1)/2$$
$$R_7=1/2\gamma$$

$\gamma^{(2)}$ は(7.4)から求まる。

3、水粒子軌道および波数

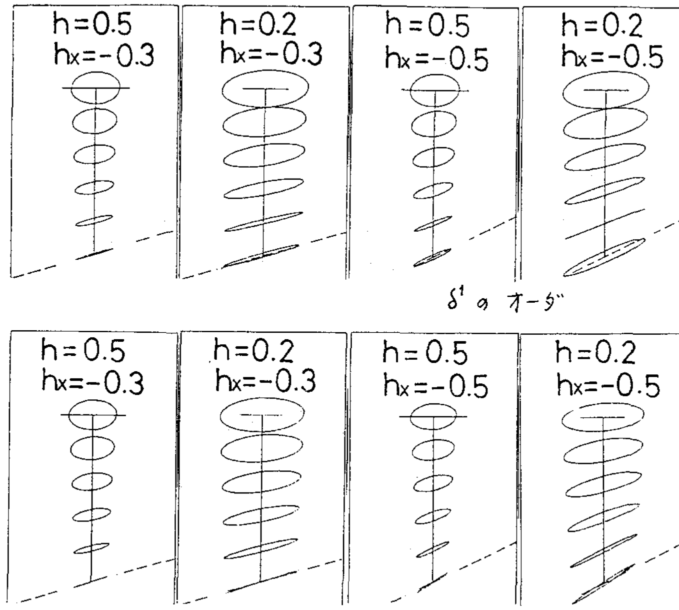
波動運動中の流速分布の表現が改善される様子を見るため δ^1, δ^2 のオーダでの水粒子軌道の計算例を図1に示す。上段は δ^1、下段は δ^2 のオーダのものである。これらから δ の展開を進めることにより、より現実に近いものとなっているのが分る。

図2は δ^2 のオーダまでの波数 k の計算例である。この図から一般に水底勾配 h_x が増せば正負にかかわらず波数は大きく、従って波速は遅くなることが分る。

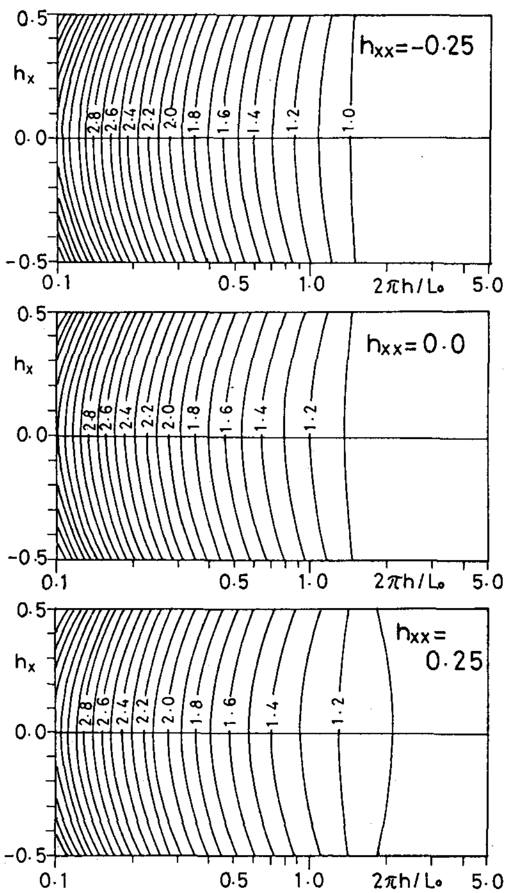
又、ここでは図示していないが、水面波形に対する δ^1, δ^2 の各オーダの寄与分は非常に少く、微小振幅波の扱いをする限り δ^0 のオーダの波形で充分であることが分った。

4、あとがき

この方法は、有限振幅の効果を考慮した振幅展開をも同時に進めることが出来る。別の機会に報告したい。



図－1　水粒子軌道　　δ^2 のオーダ



図－2　波数 k の等高線図

参考文献

(1) Keller, J.B. (1958) J.F.M. vol.4, p607

(2) Biesel, F. (1951) Gravity Waves Circular No 521, National Bureau of standard, Washington D.C., p243

(3) Tlapa, G.A. et al (1966) M.I.T. Hydrodynamics Lab. Rep. No 90

(4) 浜中建一郎 他 (1982) 土木学会道支部論文報告集 Vol 38, p169