II-426 微分摂動法による波の高次解

筑波大学理工学研究科 ○学生員 京藤敏達
筑波大学構造工学系 正員 西村仁嗣
筑波大学構造工学系 正員 椎貝博美

I．概説

複素ポテンシャルが存在して自由表面をもつ2次元非圧縮性の渦なし流れについて，その流れが鉛直軸に関して対称な場合，その複素ポテンシャルの満たす方程式を導く。さらに，深海波について，その複素ポテンシャルを写像函数を用いて求めるとき，その写像函数の満たす方程式を Levi-Civita[1] とは違った方法で導き，その方程式を解く。この方程式は，比較的簡単な恒等式であり，摂動法で容易に解くことができる。この方法の基本的な考え方は次のとおりである。

(i) 複素函数 $W(x,y)$ は，正則ならば，複素数 $z=x+iy$ のみの函数として表わされる。

(ii) 複素ポテンシャル $W(z)$ は，流れの境界と $W(z)$ の特異点が決まれば求めることができる。すなわち，境界 $\Gamma(x,y)$ で与えられた境界条件は，複素数 z で表わされる方程式に拡張することができる。これは，W が z のみの函数であるということから，次の形式的な変換 $x\to z$ で $W(z)=W(x,0)|_{x\to z}$ とできることによる。

II．対称流れの複素ポテンシャルの満たす方程式

複素ポテンシャルを $W(z)$ とおくと，$W(z)=\phi+i\psi$，$\frac{dW}{dz}=u-iv$ であり，y 軸に関して対称な流れでは，速度場 u，v は，$u(x,y)=u(-x,y)$，$v(x,y)=-v(-x,y)$ となる。次に，ポテンシャル函数 ϕ を y 軸上で0とすれば，$\phi(x,y)=-\phi(-x,y)$，$\psi(x,y)=\psi(-x,y)$ であることも明らかである。さらに，$\bar{z}=x-iy$ とおけば，

$$W(-\bar{z})=[\phi+i\psi]_{\substack{x\to -x\\ y\to y}}=\phi(-x,y)+i\psi(-x,y)$$

とできる。このとき，操作 $(x,y)\to(-x,y)$ によって $W(z)$ の実部と虚部が入れ替わらないと仮定する。しかし，一般に物理現象は滑かであり，この仮定は満たされている。これと，ϕ，ψ に関する条件から $W(-\bar{z})=-\overline{W(z)}$ が導かれる。ところで，自由表面を $\Gamma(x,y)=0$ とし，(x,y) を $(z,\bar{z})$ で表わすと $\Gamma\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0$ となるから，$\bar{z}$ は z の函数として $\bar{z}+\eta(z)=0$ となる。しかし，$\bar{z}$ が一意的に $\bar{z}+\eta(z)=0$ と表わせるとは限らない。また，境界の対称性から $\Gamma(x,y)=\Gamma(-x,y)$ であり，$\Gamma(x,y)=G(z,\bar{z})$ とおくと

$$G(-\bar{z},-z)=[G(z,\bar{z})]_{\substack{z\to -\bar{z}\\ \bar{z}\to -z}}=\Gamma\left(\frac{-\bar{z}-z}{2},\frac{-\bar{z}+z}{2i}\right)=\Gamma(-x,y)=0$$

が成り立ち，これを形式的に解くと $-z+\eta(-\bar{z})=0$ となる。以上より，自由表面の形に対しての方程式

$$-z+\eta(\eta(z))=0 \qquad (1)$$

が求まる。さらに，複素ポテンシャルの満たす方程式を求めるため，自由表面を $\psi=0$ とすると，ψ の定義より $W(z)-\overline{W(z)}=0$，$\bar{z}+\eta(z)=0$ となるが，$\overline{W(z)}=-W(-\bar{z})$ であるから，$W(z)+W(-\bar{z})=0$，すなわち

$$W(z)+W(\eta(z))=0 \qquad (2)$$

が得られる。これは，自由表面が流線となる条件である。同様にして，ベルヌーイの定理は

$$\frac{1}{2}\frac{dW(z)}{dz}\overline{\left(\frac{dW(z)}{dz}\right)}+\frac{g}{2i}(z-\bar{z})=E \quad , \quad \bar{z}+\eta(z)=0$$

であり，これに $\overline{W(z)}=-W(-\bar{z})$，$\bar{z}=-\eta(z)$ を代入すると

$$\frac{1}{2}\frac{dW(z)}{dz}\frac{dW(\eta)}{d\eta}-\frac{gi}{2}(z+\eta)=E \tag{3}$$

を得る。以上，(1)，(2)，(3)式が，自由表面をもつ対称流れの満たすべき方程式である。この解として，例えば，$W(z)=k(z-\eta)$ とおくと，(1)よりこれは(2)を満たすことがわかり，これを(3)に代入するとηに関する方程式が得られる。

Ⅲ．深海波の複素ポテンシャルを写像函数を用いて解くこと

写像函数を用いるとⅡ－(1)，(2)式は必然的に満たされ，また，複素ポテンシャルの特異点も定めることができる。従って，Ⅱ－(3)式のみを考えればよい。写像函数の満たすべき方程式は，Levi-Civita により求められ，積分方程式になるが，Ⅱの方法を使えば簡単な恒等式になる。z-平面での一波長の波をζ-平面上の単位円の内部に写像する写像函数 $z(\zeta)$ 及び，複素ポテンシャル $W(\zeta)$ は[1)]

$$z=\frac{i\lambda}{2\pi}\{\log\zeta+h(\zeta)\},\qquad W(\zeta)=-\frac{ic\lambda}{2\pi}\log\zeta$$

$$u-iv=-\frac{dW}{dz}=\frac{c}{f(\zeta)},\qquad f(\zeta)=1+\zeta h'(\zeta)$$

但し，$f(\zeta)$，$h(\zeta)$は $|\zeta|\leqq 1$ で解析的な函数

となる。Ⅱと同様にして，波形の対称性より，$\overline{f(\zeta)}=f(\bar{\zeta})$，$\overline{h(\zeta)}=h(\bar{\zeta})$ であることに注意してⅡ－(3)式に代入すれば，境界上では $\bar{\zeta}=1/\zeta$ であり，定数Eを消去すると

$$-c^2\left[f\left(\tfrac{1}{\zeta}\right)\cdot f'(\zeta)-\frac{1}{\zeta^2}f(\zeta)\cdot f'\left(\tfrac{1}{\zeta}\right)\right]+\frac{g\lambda}{2\pi}\left[f(\zeta)\cdot f\left(\tfrac{1}{\zeta}\right)\right]^2\cdot\left[\frac{1}{\zeta}\left\{f(\zeta)-f\left(\tfrac{1}{\zeta}\right)\right\}\right]=0 \tag{4}$$

を得る。ここで，$f(\zeta)$の定義及び，$h(\zeta)$が $|\zeta|\leqq 1$ で解析的であることより，$f(0)=1$ かつ $f(\zeta)$は $|\zeta|\leqq 1$ で解析的となる。さらに，波高をHとすると，写像の仕方から

$$\mathrm{Im}[z(1)-z(-1)]=\mathrm{Im}\left[\frac{i\lambda}{2\pi}\{i\pi+h(1)-h(-1)\}\right]=H,\qquad \mathrm{Im}\text{ は虚部を表わす} \tag{5}$$

となる。(4)，(5)式を摂動法で解くため，$f(\zeta)$ が波高Hの函数であるとしてパラメータHで(4)，(5)式を実質的に微分したのちに，Hを0とおく操作を繰り返す。[2)] すなわち，$f(\zeta)$のHが0に対応する解をf_0とおくと $f_0=1$ であり，さらに，(4)，(5)式をHで微分してHを0とおくと

$$P(\zeta)-P\left(\tfrac{1}{\zeta}\right)=0,\qquad P(\zeta)\equiv\frac{g\lambda}{2\pi}f_1(\zeta)-c_0^2\cdot\zeta f_1'(\zeta),\qquad f_1(\zeta)\equiv\left.\frac{\partial f}{\partial H}\right|_{H=0}$$

$$\mathrm{Re}[h_1(1)-h_1(-1)]=\frac{2\pi}{\lambda},\qquad h_1(\zeta)\equiv\left.\frac{\partial h}{\partial H}\right|_{H=0},\qquad \mathrm{Re}\text{ は実部を表わす}$$

が得られる。ところで，$P(\zeta)$は $|\zeta|\leqq 1$ で解析的だから，上式より $P(\zeta)=0$ となる。また，$c_0^2=g\lambda/2\pi$ であるから，$f_1(\zeta)=\frac{\pi}{\lambda}\zeta$ を得る。このようにして，順次 $f_n(\zeta)$ を求めることができ，第3次の項まで求めると

$$f(\zeta)\simeq 1+\left\{\frac{\pi H}{\lambda}-\frac{3}{2}\left(\frac{\pi H}{\lambda}\right)^3\right\}\zeta+2\left(\frac{\pi H}{\lambda}\right)^2\zeta^2+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi H}{\lambda}\right)^3\zeta^3,\qquad c^2\simeq\frac{g\lambda}{2\pi}\left\{1+\left(\frac{H}{\lambda}\right)^2\right\}$$

となるが，これは Stokes[3)] の結果と一致している。

参考文献

1) L. M. Milne Thomson　Theoretical Hydrodynamics / 5th Edition，Macmillan
2) 椎貝博美，宗藤敏達　流体力学に用いられる摂動法について　Nagare 第13巻4号 (1981)
3) J. N. Hunt　A Note On Gravity Waves Of Finite Amplitude，Quart. Journ. Mech. and Appllied Math.，Vol. VI，Pt. 3 (1953)