II-420　境界値問題としての鉛直スリット周辺波動場の解析

大阪市立大学工学部　正員　角野昇八

1. まえがき　本論文で対象とする鉛直スリットとは，鋼管防波堤やスリット式防波堤前面板にみられる円柱あるいは角柱によってはさまれたスリット，防波堤開口部のように壁中に設けられた開口部など，波長に比べて小さい壁厚の部材によって構成され，かつ波長に比べて狭い幅を有する1つあるいは無数のスリットを念頭におくものとする。このような構造の周辺波動場を速度ポテンシャルをもつ波の境界値問題として扱った最近の研究例としては，長方形および扇形の港の副振動についてフーリエ変換を用いて解析した合田[1]の例，スリット壁式消波構造について解析した堀口他[2]の例などがある。

本論文においては，これらの手法とは全く異なった手法であるMatched Asymptotic Expansions Method[3] (M.A.E.M.)が上記構造周辺波動場のポテンシャル論的解析に有効な一手法であることを示すために，その解析例の1つとして無限水域中の無限長障壁にある1つの鉛直スリットからの波の反射率，透過率（回折係数）の問題をとりあげる．また，上記構造に関してこの手法が適用可能であるような分野についても考察を加える。

2. 1つの鉛直スリットからの波の反射率と透過率　M.A.E.M.は粘性流，非粘性流にかかわらず流体力学の様々の分野で従来より広く用いられてきた手法であり，その成功例の1つとしてはPrandtl の境界層理論があげられる。この手法をスリットからの波の透過の問題に最初に適用したのはTuck[4]であり，深海域中の無限長障壁にある1つの水平スリットからの波の透過を扱った。以下ではそれとは異なり，浅海域中の無限長障壁にある1つの鉛直スリットを対象とし，その境界値問題を扱う。

M.A.E.M.の特徴の1つとしてあげられるのは，対象の現象に対してそれを遠方からながめることに相当するouter expansionおよび近傍からながめることに相当するinner expansionを各々独立に求め，前者の inner limitおよび後者のouter limit を接続(matching)させることにより場全体を包括する解を求めようとすることである。したがっていま対象としている鉛直スリットの場合，outer expansionとしては，スリットからの流れを遠方からながめた解を，またinner expansionとしてはスリット通過の流れを詳細に表現できる解を用意すればよい。　<u>1) 問題の定式化</u>　x, y軸を水平面内に，またz軸を鉛直上向きにとる。障壁はy軸($x=0$)に沿って，またスリットはx, y座標の原点にあるものとし，その幅を$2a$とする。また解析にあたっては以下の仮定を設ける。a) 非粘性，非圧縮性流体。b) 微小振幅浅海波を対象とし，水深は一定。c) 壁厚および スリット幅は波長に比べて極めて小さい．以上の仮定の下で問題は，3次元ラプラスの方程式，自由表面運動学的境界条件，同力学的境界条件，海底における境界条件，および壁面における境界条件$(\partial\phi/\partial x)_{x=0}=0,\ (|y|>a)$を満足する解$\phi$を求めることである。解析にあたっては解が変数分離形で表わされるものとし，さらにx軸上の現象のみに注目することにする。すなわち求める解を　$\phi=\cosh k(h+z)/\cosh kh\cdot e^{-i\sigma t}\cdot F(x)$　の形に表わし，結局複素変数$F(x)$を求める問題に帰着させる。このように問題を設定し，いま入射波はx軸の負の方向から正の方向へ進行するものとすれば，x軸上の$x\to\pm\infty$においては以下に示す波の存在が予想される。

$$F(x)\to A_I\cdot e^{ikx}+\rho\cdot A_I\cdot e^{-ikx}\quad(x\to-\infty)\text{-----}(1),\qquad F(x)\to\tau\cdot A_I\cdot e^{ikx}\quad(x\to+\infty)\text{-----}(2)$$

ここに，A_I, ρ, τは複素定数であり，式(1)の右辺第1項は入射波，第2項は反射波，また式(2)の右辺は透過波を表わす。　<u>2) outer problem</u>　スリットを通る流れを一方の遠方からみるとき，わき出しからの流れのようにみえることが直感的に想像される。また他方の遠方からは，すい込みへの流れのようにみえるに違いない。一方，波動場におけるわき出しからの流れはよく知られているように，ハンケル関数を用いて

$$F(x,y)=-i/4\cdot H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+y^2})\text{--------}(3)$$

と表わすことができる。そこでouter expansionとしての既述の流れを以下のように表わす。

$$F(x,y)=i/4\cdot H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+y^2})+A\cdot e^{ikx}+B\cdot e^{-ikx}\quad(x<0)\text{------}(4)$$

$F(x,y) = -\frac{i}{4}\cdot H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+y^2}) \quad (x>0)$ -------(5)　ここに A, B は複素定数であり，式(4)の右辺第1項はスリットから $x<0$ 側に発生する波，第2項は入射波，第3項は壁面からの反射波を，また式(5)の右辺はスリットから $x>0$ 側に発生する波をそれぞれ表わす。式(4)の右辺第1項および式(5)は y 軸に関して対称形であるので，壁面における境界条件を満足していることに注意したい。また式(4)の右辺第2項と第3項の和も壁面での境界条件を満足せねばならないとの条件より A = B の関係が得られる。ここで式(1)と式(2)との対応をみるために式(4)と式(5)の $x\to\pm\infty$ での挙動（x軸上）を求めれば，

$$F(x)\to \frac{i}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi kx}}\cdot e^{-i(kx+\pi/4)} + A\cdot e^{ikx} + A\cdot e^{-ikx} \quad (x\to-\infty) \quad (6)$$

$$F(x)\to -\frac{i}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi kx}}\cdot e^{i(kx-\pi/4)} \quad (x\to+\infty) \text{---} (7)$$

式(1)と式(6)，式(2)と式(7)とを等置することにより以下の関係が得られる。

$$\rho = \frac{i}{4}A_I\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi kx}}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i} + 1 \text{-----}(8),\qquad \tau = -\frac{i}{4}A_I\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi kx}}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i} \text{-----}(9)$$

次に outer expansion のスリット近傍（$x\to 0_\pm$）の挙動（inner limit）としては次式が得られる。

$$F(x)\to -\frac{1}{2\pi}\cdot\log\left(\frac{-kx}{2}\right) + 2A - \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{i}{4} \quad (x\to 0_-) \text{---}(10)$$

$$F(x)\to \frac{1}{2\pi}\cdot\log\left(\frac{kx}{2}\right) + \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{i}{4} \quad (x\to 0_+) \text{---}(11)$$

ここに　γ：オイラーの定数 $= 0.577216$.

3) inner problem　スリットを通過する流れの詳細を表わす解は，複素 ζ - 面の原点にある強さ m のわき出しを表わす解，$F = \frac{m}{2\pi}\cdot\log\zeta + C$　（C：複素定数）(12) を次式の Joukowski 変換によって $z^*(=x+iy)$ 面に写像することにより得られる。$z^* = -\frac{1}{2}\cdot ia(\zeta+\zeta^{-1})$ ----(13)　これらの式(12)と式(13)の両式より，inner expansion の outer limit（$x\to\pm\infty$ での挙動）は，$|\zeta|\to {}^{\infty}_{0}$ として，

$$F(x)\to -\frac{m}{2\pi}\cdot\log(-x) + \left[C + \frac{m}{2\pi}\cdot\log\left(\frac{1}{2}\cdot ia\right)\right] \quad \left(\begin{matrix}|\zeta|\to 0\\ x\to-\infty\end{matrix}\right) \text{------}(14)$$

$$F(x)\to \frac{m}{2\pi}\cdot\log(x) + \left[C - \frac{m}{2\pi}\cdot\log\left(-\frac{1}{2}\cdot ia\right)\right] \quad \left(\begin{matrix}|\zeta|\to \infty\\ x\to+\infty\end{matrix}\right) \text{------}(15)$$

4) matching　outer expansion の inner limit である式(10)および式(11)と，inner expansion の outer limit である式(14)および式(15)とを各々 matching（等置）させることにより，すべての未知複素定数 A_I, A, C および実定数 m とが定まり，全体を包括する解が決定されることになる。得られた A_I を式(8)あるいは式(9)に代入すれば，x軸上における反射率 $K_R(=|\rho|)$ や透過率 $K_T(=|\tau|)$ の値が求められる。一例として K_T は，

$$K_T = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot(A_1^2+A_2^2)}},\qquad \text{ここに } A_1 = \log\left(\frac{ka}{4}\right)+\gamma,\quad A_2 = -\frac{\pi}{2}$$

と求められる。これは，Lamb[5] が紹介したすき間からの音波の回折問題の解から誘導されるものと形式的に一致することが確認され，興味深い。

3. 本手法の適用の可能性

本手法は上に解析例をあげた問題ばかりでなく，まえがきに述べた種々の問題に対しても適用することが可能である。まず1つのわき出しからの波動場に対応する式(3)に対して，y軸上に一定間隔で無数に分布したわき出しからの波動場を鏡像原理を利用して求め，それを outer expansion に用いれば，薄壁に設けられた無数の鉛直スリット周辺波動場の解が得られることになる。またこれと同様に outer expansion として無数のわき出しからの波動を与えるものを用い，一方 inner expansion としては円柱あるいは角柱によってはさまれたスリットを通過する流れを与える解を用いれば，円柱列や角柱列周辺波動場の解が得られる。さらに，無数のわき出しを $x=2\ell$ の線上にも配置して $x<0$ における解を求めれば，ℓ の消波室幅を有する直立消波構造前面の解が得られることになる。またこれらの他にも長方形港湾副振動の問題などへの適用も考えられる。これらのうちの一部のケースについては既に解を得ているので別の機会に発表したい。なお，スリット部におけるエネルギー損失の取り扱いについては，別[6]に発表した手法によればよく，その際"仮想入射波"としては本手法における透過波を考えればよいと思われる。これについても別の機会に発表したい。

最後に，本研究費の一部は実吉奨学会研究助成金によった。ここに記して謝意を表する。

4. 参考文献

1) 合田，第10回海講，pp. 53-58, 1963.　2) 堀口他，第27回海講，pp. 325-329, 1980.　3) Van Dyke, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, 1964.　4) Tuck, J. Fluid Mech., vol. 49, pp. 65-74.　5) Lamb, Hydrodynamics, 6th Ed.　6) 角野・伊庭・松永・小田，第37回年講，1982.