II-396　軸対称物体に作用する流体力の解析法について

愛媛大学工学部　正員　中村孝幸

1．まえがき：　鉛直軸まわりの軸対称性を有する任意な固定物体を対象にFenton[1]は軸対称グリーン関数を用いたポテンシャル的な波力の算定法について明らかにしている。しかしながらFentonの解析において，グリーン関数並びにその法線微分値の特異点における取扱いはさらに検討されるべき余地があり，しかもこれら関数の算定式は実用にあたっては複雑すぎる欠点を有している。このような観点より，本研究では上記　関数の特異点における取扱い並びに表示式について再検討を加え解析法の確立をはかるとともに浮体の応答問題にまで対処できるように解析法を拡張し，従来の実験結果との比較の上で本解析法の妥当性を検証したものである。

2．回折波問題の解析法：Fentonにより示されているように時間変動項$e^{-i\omega t}$を除く回折波ポテンシャル$\phi_D(r,\theta,z)$は，角度座標θに関するフーリエ余弦展開を利用して(1)式のように表わすことができる。

$$\phi_D(r,\theta,z)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\phi_{D\ell}(r,z)\cos\ell\theta=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{2}\int_C f_\ell(R,Z)\,G_\ell(r,z;R,Z)\,dC(R,Z)\cos\ell\theta \qquad (1)$$

ここにG_ℓはフーリエモードℓの軸対称グリーン関数を，$f_\ell(R,Z)$はわき出し強さの分布関数をフーリエ余弦展開したときのフーリエ係数で境界条件により決定される未知関数である．用いた座標系・変数については図-1を参照されたい。

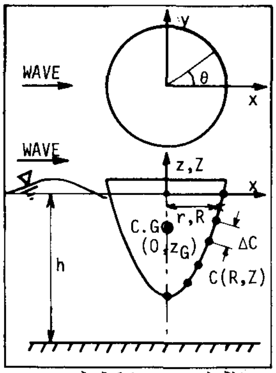

図-1 座標系および変数

i) $f_\ell(R,Z)$ の決定方程式：$f_\ell(R,Z)$は物体表面上の境界条件$\partial\phi_I/\partial n+\partial\phi_D/\partial n=0$により決定でき，これを各フーリエモード$\ell$ごとの係数方程式で示すのが(2)式である。

$$\partial\phi_{I\ell}/\partial n+\frac{1}{2}\int_C f_\ell(R,Z)\,\beta_\ell(r,z;R,Z)\,dC(R,Z)=0 \qquad (\ell=0,1,2\cdots) \qquad (2)$$

ここに$\phi_{I\ell}$は入射波の速度ポテンシャルϕ_Iをフーリエ余弦展開したときのフーリエモードℓの係数で，β_ℓはG_ℓの法線微分値である。なおFentonは(2)式の表示において($r=R$, $z=Z$)の特異点における式中第2項の積分値の一部を分離表示した式を用いているが，彼の解析に見られるように特異点における他の残りの積分値と混同して重複算定する誤りをおかしやすく，本研究では(2)式のような表示式を採用した。

そして各フーリエモードℓについて(2)式を解きf_ℓが求められると，(1)式を介してϕ_Dが求まることになる。しかしながら軸対称物体に作用する波力は，$\ell=0$，1の$\phi_{D\ell}$のみで算定することができ，Fentonにより報告されているように3次元的なわき出し分布法による解析に比し大きな計算利得が可能となる。

ii)軸対称グリーン関数の法線微分β_ℓの算定法：(2)式中のβ_ℓは一般的に(3)式で示されるものである。

$$\beta_\ell(r,z;R,Z)=\frac{\partial}{\partial n}(G_\ell)=\frac{\partial}{\partial n}\left(G_{\ell 0}+\sum_{m=1}^{\infty}G_{\ell m}\right)=\beta_{\ell 0}+\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{\ell m} \qquad (3)$$

ここに右辺第1項は進行波型の，第2項はEvanescent modeの波のポテンシャルによる法線方向への流速を示す。そしてこの第2項は，($r=R$, $z=Z$)の条件でいくつかの特異性を示すため取扱いが複雑となる。

Fentonは，(3)式の右辺第2項中の無限級数和を効率よく求めるため(4)式に示すような方法を用いている。

$$\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{\ell m}=\left(\sum_{m=1}^{M}\beta_{\ell m}-\sum_{m=1}^{M}\beta_{\ell m}^{*}\right)+\beta_{\ell\Sigma}^{*} \qquad (4)$$

ここに$\beta_{\ell m}^{*}$はmが十分大きいときの$\beta_{\ell m}$の一般項で，$\beta_{\ell\Sigma}^{*}$は$\beta_{\ell m}^{*}$の無限級数和で解析的に算定できる量である。

さらにFentonは$\beta_{\ell\Sigma}^{*}$の中に特異性を示す関数が集約されていることを明らかにし，計6ケの特異関数S_i ($i=1\sim6$)を抽出している。(5)式は$\beta_{\ell\Sigma}^{*}$に含まれる特異関数の概略を示すものである。

$$\beta_{\ell\Sigma}=1/X+1/Y+\log X+\log Y \qquad (5)$$

ここにXは($r=R$, $z=Z$)の条件で0に，Yは($r=R$, $z=Z=0$ or $-h$)の条件で0となる関数である。

そしてFentonは，(2)式第2項の積分を中央点近似法により実行し，特異関数S_iの積分については線素分ΔCにわたっての厳密積分を行ない，(3)式のΔCにわたる積分値の表示として(6)式を与えている。

$$\int_{\Delta C}\beta_\ell dC=\left\{\beta_{\ell 0}+\left(\sum_{m=1}^{M}\beta_{\ell m}-\sum_{m=1}^{M}\beta_{\ell m}^{*}\right)+\left(\beta_{\ell I}^{*}-\sum_{i=1}^{6}S_i\right\}\Delta C+\sum_{i=1}^{6}\int_{\Delta C}S_i\,dC \qquad (6)$$

しかしながらS_iについて検討してみると，表-1に示すように(5)式の特異関数の各特異点における特異性を集合したもので(6)式の表現は妥当なものとは言えず，算定式の複雑さの原因にもなっている。

したがって本研究では各特異点ごとに対応する$\int\beta_\ell dC$の表現を与える方法に修正し，たとえば最もよく遭偶する特異点($r=R, z=Z\neq 0,-h$)における(6)式に対応する算定式の概略は(7)式のようになる。

fun.in Eq.(5) / sing. point	1/X	1/Y	logX	logY
r=R z=Z≠0,-h	∞ (S_3)	finite	∞ (S_6)	finite
r=R z=Z=0	∞ (S_3)	∞ (S_1)	∞ (S_6)	∞ (S_4)
r=R z=Z=-h	∞ (S_3)	∞ (S_2)	∞ (S_6)	∞ (S_5)

表-1 $\beta_{\ell I}^{*}$の特異性とS_iの関係

$$\int_{\Delta C}\beta_\ell dC =\left\{\beta_{\ell 0}+\left(\sum_{m=1}^{M}\beta_{\ell m}-\sum_{m=1}^{M}\beta_{\ell m}^{*}\right)+\left(\beta_{\ell I}^{*}-\frac{1}{X}-\log X\right)\right\}\Delta C+\int S_3\,dC+\int S_6\,dC \qquad (7)$$

またFentonは(6)式中の項数和の上限値Mについて高々20程度を採用すればよいと報告しているが，(4)式の表現からもわかるように$\beta_{\ell m}$の$\beta_{\ell m}^{*}$への近似度合を尺度にしてMを決定する必要がある。このことを考慮して本研究ではEvanesent mode waveの波数k_mが$m\pi/h$で十分近似(99%)できるときのmの値をMとして採用することとした。そしてFentonの$M\approx 20$の方法では，$h/L\geq 0.5$の条件で精度よく波力などの算定ができないことを確認しており，効率よく算定を行なう上からも上記Mの決定法は妥当なものと考えられる。

本研究ではグリーン関数G_ℓについても再検討しているが，上記β_ℓと類似した展開となるため割愛したい。

3．発散波問題の解析法：軸対称物体を対象にしていることから，運動モードとしてはSurging ($K=1$)，Heaving ($K=2$)，Pitching ($K=3$)の3つのみを考慮すればよい。そしてこれらの運動に基づく発散波ポテンシャルϕ_K^R ($K=1\sim 3$)は(8)式のように表わすことができる。

$$\phi_1^R=\frac{1}{2}\int_C S(R,Z)\,G_1(r,z;R,Z)\,dC\cos\theta,\quad \phi_2^R=\frac{1}{2}\int_C H(R,Z)\cdot G_0(r,z;R,Z)\,dC$$
$$\phi_3^R=\frac{1}{2}\int_C P(R,Z)\,G_1(r,z;R,Z)\,dC\cos\theta \qquad (8)$$

ここにS,H,Pは各々上記$K=1,2,3$の運動モードに対応するわき出し強さである。そして回折波の表示である(1)式と比較すると$K=1,3$の場合フーリエモード$\ell=1$のみで，$K=2$の場合$\ell=0$のみでポテンシャル表示ができる相違点がある。そしてわき出し強さS,H,Pは浮体の運動学的な境界条件(9)式により決定される。

$$\partial\phi_K^R/\partial n=U_1\cdot n_r\cos\theta\ (K=1),\quad U_2\cdot n_z\ (K=2),\quad U_3\{(z-z_G)n_r-rn_z\}\cos\theta\ (K=3) \qquad (9)$$

ここにU_Kは各運動モードの運動速度振巾を，n_r, n_zは各々物体の回転曲線C上における単位法線ベクトルの動径方向，鉛直方向成分である。そして(9)式を解くにあたり，2.ii)で述べたβ_ℓの算定がそのまま採用できる。

4．算定結果：本研究では上述した方法に基づき各種の軸対称物体について回折波問題並びに発散波問題の解法を行ない作用波力並びに付加質量係数などを求めた。そしてここではこれら算定流体力の総合的な評価を与えると考えられる浮体の波浪応答の算定結果について示す。図-2は運輸省港湾技術研究所で行なわれたDiscus Buoyの波浪応答についての実験結果[2)]と本研究による算定結果との比較を示すものである。この図より，算定結果は運動モードにかかわらず実験結果の変動傾向をよくあらわしており，本解析法を用いて軸対称物体に作用する流体力並びに波浪応答の算定が行なえるものと言えよう。なお本研究で行なった半球浮体・半潜水円柱についての算定結果は，Garrisonの3次元的なわき出し分布法に基づく算定結果とよく一致していたことを付記しておく。

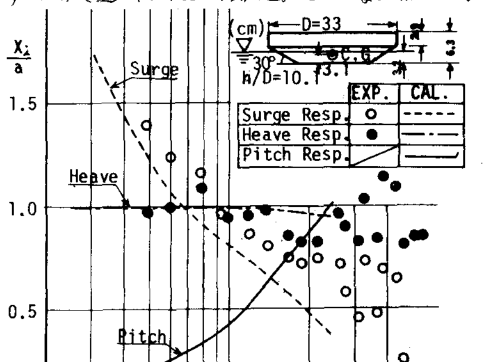

図-2 Discus Buoyの波浪応答に関する実験値と算定値との比較

(参考文献) 1) Fenton,J. D., "Wave forces on vertical bodies of revolution", J. of Fluid Mech., Vol.85, 1978.
2) 合田良実他"波浪観測ブイ模型実験報告書"港湾技術研究所 波浪研究室資料No.15, 1977.