

1. まえがき

本報告は、任意形状構造物に作用する波力を3次元のグリーン公式を用いて定式化したものである。3次元の問題にグリーン公式を適用する際問題になるのは、無限遠方の放射条件の取扱いである。この条件を直接導入して問題を解こうとすると、構造物の径の少なくとも5～6倍程度離れた位置に境界面を設けなければならないと言われており、したがって未知数の数が膨大になり非実用的である。そこで本報告では、無限遠方の放射条件を予め満たすような解析解を導き、これとグリーン公式から与えられる数値解とを、構造物近傍に設けた仮想境界面上で接続することによって未知数を減らす方法について述べる。

2. 理 論

1) 基本的な考え方：一定の水深 h を有する水域に構造物があり、この構造物に角振動数 ω の微小振幅波が入射してくるものとする。今、Fig. 1のように座標系をとり、散乱波のポテンシャル ϕ を $\phi = \phi(r, \theta, z)e^{-i\omega t}$ と表わす。

基礎方程式および境界条件は通常の線形理論と同様で、3次元ラプラス方程式(in Ω)、自由表面条件(on S_f)、海底面の不透過条件(on S_b)、構造物没水表面の不透過条件(on S_h)および無限遠方の放射条件($r=r_\infty$)である。3次元グリーン公式にこれらの条件式を代入すると、未知数を ϕ とする境界積分方程式が得られる。しかし、これを数値解析によって解こうとすると、構造物から無限に離れた位置に境界面 S_∞ を設けなければならない、現実的に無理である。そこで、Fig. 1のように構造物の近傍に仮想境界面 S_r を設け、この面で無限遠方の放射条件を考慮することによって未知数の数を減らす。

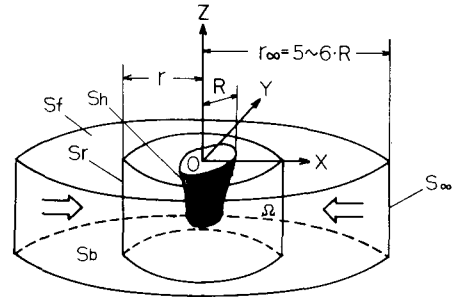


Fig. 1 Coordinate system

2) 仮想境界面上での解析解と数値解の接続：円筒座標系を用いて ϕ を原点のまわりの角度 θ に関して複素フーリエ展開し、 z および r に関して固有関数展開すると、無限遠方の放射条件を解析的に満足するような一般解が得られる。そこで3次元のグリーン公式中の S_r 上での積分項の中にこの解を導入することによって無限遠方の放射条件を考慮する。ところが積分方程式を解く上で問題になるのは、この項の中にあらわれる $\partial\phi/\partial r$ である。解析解の中には、 $k_0 r$ および $k_n r$ (k_0, k_n は波数および固有値)を変数とするハンケル関数および変形ベッセル関数があらわれるが、これらの漸近展開を用いることによって $\partial\phi/\partial r$ は、結果として次式のように表わすことができる。ただし $K = \omega^2/g$, r は原点から S_r までの距離である。

$$\frac{\partial\phi(r, \theta, z)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n \int_{-h}^0 \phi(r, \theta, \xi) \left\{ \frac{\cos k_n(h+\xi)}{\cos k_n h} \right\} d\xi}{h(k_n^2 + K^2) - K} \frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_n h} \left(-\frac{1}{2k_n r} - 1 \right) \\ + \frac{2k_0^3 \int_{-h}^0 \phi(r, \theta, \xi) \left\{ \frac{\cosh k_0(h+\xi)}{\cosh k_0 h} \right\} d\xi}{h(k_0^2 - K^2) + K} \frac{\cosh k_n(h+z)}{\cosh k_n h} \left(-\frac{1}{2k_0 r} + i \right) \dots \dots \dots (1)$$

(1)式によって $\partial\phi/\partial r$ は ϕ で記述でき、これによって ϕ のみを未知数とする境界積分方程式が得られる。

3) 境界積分方程式の離散化：今、 S_h, S_f, S_b の分割数を N_1, N_2, N_3 とし、 S_r は鉛直方向に N_4 分割、 θ 方向に N_5 分割するものとする。積分方程式を離散化して次のように行列表示する。

$$[A]\{\phi\} = \{C\} \quad (\{\phi\} = {}^T\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N\}) \dots \dots \dots (2)$$

全要素を $N (=N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \times N_5)$ とすると、 $[A]$ は $N \times N$ の行列、 $\{\phi\}$ および $\{C\}$ は N 元のベクトルである。ただし ϕ_i は i 番目分割要素上の未知ポテンシャルを表わす。

$[A], \{C\}$ の要素を a_{ij}, c_i ($i, j = 1 \sim N$)とすると、 c_i は以下のように表わせる。

$$\left\{ \begin{aligned} c_i &= (1 - \delta_{ij}) \sum_{j=1}^{N_1} (f_j / L_{ij}) \Delta S_j + \delta_{ij} 2 \pi r_{oj} f_j \dots\dots\dots (3) \\ f_j &= (igH_0 / 2\omega) \cdot (k_0 / \cosh k_0 h) \exp \{ i k_0 (x_j \cos \alpha + y_j \sin \alpha) \} g_j \dots\dots\dots (4) \\ g_j &= n_{zj} \sinh k_0 (h + z_j) + i (n_{xj} \cos \alpha + n_{yj} \sin \alpha) \cosh k_0 (h + z_j) \dots\dots\dots (5) \end{aligned} \right.$$

ただし δ_{ij} はクロネッカー記号, L_{ij} は i, j 要素間の距離, ΔS_j は j 要素の面積, r_{oj} は ΔS_j と等しい円の半径, H_0 は入射波の波高, α は入射角 (X 軸となす角) である。また (x_j, y_j, z_j) は j 要素の座標, (n_{xj}, n_{yj}, n_{zj}) は単位法線ベクトルの x, y, z 成分を表わす。また a_{ij} は j によって形が異なり, $i = 1 \sim N, j = 1 \sim N_1 + N_2 + N_3$ については次式のようになる。

$$a_{ij} = \begin{cases} (1 - \delta_{ij}) \Delta S_j \{ n_{xj} (x_i - x_j) + n_{yj} (y_i - y_j) + n_{zj} (z_i - z_j) \} / L_{ij} + \delta_{ij} 2 \pi \\ (i = 1 \sim N, j = 1 \sim N_1) \dots\dots\dots (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - \delta_{ij}) \Delta S_j \{ (z_i - z_j) / L_{ij}^3 - \omega^2 / g L_{ij} + \delta_{ij} 2 \pi (1 - r_{oi} \omega^2 / g) \} \\ (i = 1 \sim N, j = N_1 + 1 \sim N_1 + N_2) \dots\dots\dots (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - \delta_{ij}) \Delta S_j \{ (z_j - z_i) / L_{ij}^3 \} + \delta_{ij} 2 \pi \\ (i = 1 \sim N, j = N_1 + N_2 + 1 \sim N_1 + N_2 + N_3) \dots\dots\dots (8) \end{cases}$$

また, S_r を散乱波の項が無視できる位置に設けるとすれば, $j = N_1 + N_2 + N_3 + 1 \sim N$ については,

$$\left\{ \begin{aligned} a_{ij} &= (1 - \delta_{ij}) \Delta S_j \{ x_j (x_i - x_j) + y_j (y_i - y_j) \} / \{ L_{ij}^3 r \} + \delta_{ij} 2 \pi \\ &\quad - \frac{2 k_0^3}{h (k_0^3 - K^2) + K} \left(- \frac{1}{2 k_0 r} + i \right) \frac{\cosh k_0 (h + z_0)}{\cosh k_0 h} \Delta z_i \quad \begin{matrix} k N_4 + N_{13} \\ \sum_{m=(k-1)N_4 + N_{13} + 1}^{N_4 + N_{13}} P_{im} \end{matrix} \\ &\quad (i = 1 \sim N, j = (k - 1) N_4 + N_{13} + 1 \sim k N_4 + N_{13} \text{ for } (k = 1 \sim N_5) \dots\dots\dots (9) \end{aligned} \right.$$

$$P_{im} = \{ \cosh k_0 (h + z_m) / \cosh k_0 h \} \{ \delta_{im} 2 \pi r_{om} + (1 - \delta_{im}) (\Delta S_m / L_{im}) \} \dots\dots\dots (10)$$

と表わすことができる。ただし Δz_j は j 要素の鉛直方向の長さ, $N_{13} = N_1 + N_2 + N_3$ である。

3. 妥当性の検証

理論の妥当性を調べるために, 円筒形固定構造物に作用する変動圧力の分布を計算し, MacCamy & Fuchs の厳密解¹⁾と比較した。ここでは S_r を円筒の径 R の 2 倍の位置に固定し, 分割数 N を変化させてみた。 $z = -h/4$ における計算結果および厳密解を Fig. 3 に示す。図中 BEM が本理論による計算値を, EXACT が厳密解を表わす。

この図よりわかるように, 計算値は構造物背面付近 ($\theta = 135^\circ \sim 180^\circ$) でやや精度が落ちているものの, 大略一致している。また, N を大きくするに従って計算値は厳密解に近づいているのがわかる。

4. あとがき

以上述べてきたように, 著者らは任意形状構造物に作用する波力の解析法として, 3次元のグリーン公式を用いた数値解法を示した。これによって得られた成果を以下に述べる。

- 本解析は, グリーン関数を用いることなくグリーンの公式のみによって定式化を行なっている。したがって特異点分布法に較べて未知数は多くなるものの, 計算自体は単純になった。
 - 従来取り扱いが困難とされていた無限遠方の放射条件を直接導入しないで, その条件を満足するような解析解を仮想境界面上に配置する方法を用いているため, 解析領域を縮小することができた。
 - N を大きくすることによって計算値は厳密解に収束しており, 本理論の妥当性が検証できた。
- また, 本報告では理論の概要について述べたが, その詳細については別の機会に報告する所存である。

- MacCamy, R. C., Fuchs, R. A.: Wave forces on Piles; a diffraction theory, Tech. Memo, No 69, Beach Erosion Board, pp1~17, 1954

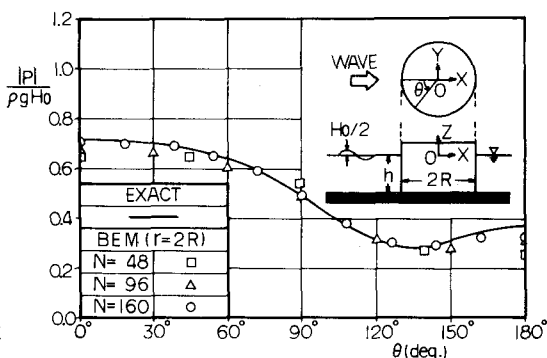


Fig. 2 Hydrodynamic pressures on a vertical cylinder ($k_0 R = 1.0, z = -h/4$)