

運輸省土木工学建設局 正会員 矢島 道夫

1 はじめに

前回の学術講演会で、年毎 \$N\$ 回発生する気象じょう乱時の最大波高 \$Z\$ が指数分布することを利用して、年最大波高 \$W\$ の確率分布 (Gumbel 分布) を推定する方法を提案した。前回は簡単化のために \$Z\$ の年間発生回数 \$N\$ を定数として扱い、平均値 \$n\$ として解析した。実際には、\$N\$ もまた確率変数である。本論文では、\$N\$ がポアソン分布をすることを示すとともに、\$N\$ を確率変数とみなしたときの、年最大波高 \$W\$ の確率分布型の推定方法を提案するのである。

2 \$N\$ の確率分布型

瀬戸に於ける 11 年間の波高観測記録から、最大波高 \$H_0 = 2.5\text{m}\$ 以上の気象じょう乱の発生回数の頻度分布と、これがポアソン分布をすることした場合とを比較すると図-1 のようになる。そこで理論的なポアソン分布は、\$N\$ の年平均発生回数 11 回をパラメータとしたものである。図-1 から、また \$\chi^2\$ 検定の結果から、\$N\$ がポアソン分布をすることを判断できる。

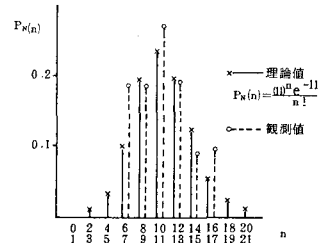


図-1 気象じょう乱 (\$H_0 \geq 2.5\text{m}\$) の年間発生回数 \$N\$ の分布 (瀬戸)

3 年最大波高 \$W\$ の分布型の推定

波高観測記録から得られるのは、右のようなデータである。そこで

\$i\$: \$i\$ 年目の観測記録であることを示す。

\$Z_{ij}\$: \$i\$ 年目に於ける波高 \$H_0\$ 以上の気象じょう乱時の最大波高

\$n_i\$: \$i\$ 年目に於ける \$Z\$ の発生回数

\$Z\$ が次式で示される指数分布をすることすれば、

$$F_Z(Z) = 1 - e^{-\lambda(Z-H_0)} \quad (1)$$

このパラメータ \$\lambda\$ は、次のようにして推定される。

$$m_Z = \frac{1}{\lambda} + H_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^R n_i} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij} \quad (2)$$

同様に、\$N\$ をポアソン分布で表わすと、パラメータ \$\nu\$ は、次式から求められる。

$$P_N(n) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \quad m_N = \nu = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R n_i \quad (3)$$

以上のようにして、\$Z\$ と \$N\$ の確率分布が決定されると、年最大波高 \$W\$ が Gumbel 分布で表わせることが導かれる。

$$\begin{aligned} F_W(w) &= [F_Z(w)]^N = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - e^{-\lambda(w-H_0)}]^n \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \\ &= e^{-\nu} \times \exp[\nu - \nu e^{-\lambda(w-H_0)}] \quad (\because \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x) \\ &= \exp[-e^{-\alpha(w-u)}] \\ &= \text{すなわち、} \alpha = \lambda, \quad u = H_0 + \frac{\ln(\nu)}{\lambda} \end{aligned} \quad (4)$$

4 確率波高の期待値と分散の推定

(4) 式が得られれば、再現期間 \$T\$ 年の確率波高 \$w_T\$ は、\$F_W(w_T) = 1 - \frac{1}{T}\$ より、次式となる。

$$w_T = \frac{1}{\lambda} [\ln(\nu) - \ln(-\ln \frac{T-1}{T})] + H_0 \quad (5)$$

確率変数 \$Z\$ と \$N\$ の期待値と分散を

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda} + H_0 \quad \text{Var}(Z) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (6)$$

$$E(N) = \nu \quad \text{Var}(N) = \nu \quad (7)$$

とすれば、(5)式で求められる確率投資 W_t の期待値と分散は、

$$E(W_t) = \frac{1}{\lambda} (\ln V - \frac{1}{2V\sigma^2} + a) + H_0 \quad (8)$$

$$\text{Var}(W_t) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2V} \right) \left(1 + \frac{1}{2V} \right) \left\{ \frac{1}{2V} + (\ln V - \frac{1}{2V\sigma^2} + a)^2 \right\} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2V} \right) \quad (9)$$

ただし、上記2式に於いて、 $a = -\ln(-\ln \frac{\lambda-1}{\lambda})$

上記2つの近似式の精度を検討するため、モンテカルロ法(M.C法)を用いた。 $\lambda = 1.41$ 、 $H_0 = 2.5$ 、 $V = 11$ として、(2)(3)式にM.C法を適用し、(5)式で確率投資について1,000個のサンプルを得た。このサンプルの平均、標準偏差と、(8)(9)式から得られる近似値を比較したものが表-1である。(5)式で求められる確率投資の期待値は真値にほぼ等しく、5年以内の観測記録を用いるのであれば、(9)式より求める分散の推定値は、かなり良好であると判断される。

前報で述べたように、2年の年別発生回数 N を定数とした場合には、(8)(9)式に相当する確率投資 W_t の期待値と分散は、各々次式となる。

$$E(W_t) = \frac{1}{\lambda} (\ln V + a) + H_0 \quad (10)$$

$$\text{Var}(W_t) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{V\sigma^2} \right) (\ln V + a)^2 \quad (11)$$

上記のM.C法と同一条件で、(8)(9)式と、(10)(11)式を比較したものが、表-2である。

5 実用上の注意

投資観測記録を用いる場合、欠測の取扱い方が問題となる。実用上次の訂正方法が考えられる。

1. 欠測が対象の年々時の投資と無関係、互らわらぬ投資以上の気象の年々時の最大投資について、その観測された頻度分布と欠測期間中の頻度分布が同じであると仮定できるのであれば、(1)式のパラメータ λ の値は欠測の有無、あるいは長短にかかわらず一定であり、確率投資の値に影響しない。しかし、一般には高投資時の欠測が多いと考えられるので、投資推算等が補うほうがよい。

2. 確率投資の値は、(3)式で示される N の確率分布に大きく左右される。欠測のために、(3)式のパラメータ V が小さく与えられると、確率投資も小さくなる。上記と同様に投資推算等が補うことも考えられるが、ケース数が非常に多くなる。簡便な方法として、ある年のある季節に、観測率が $P(\%)$ で、 N が m と得られているならば、この季節の年々発生回数 N を $\frac{m}{P}$ と補正するのが望ましい。

本稿で提案した確率投資の推定法は、従来用いられている極値時系列法に比して、より多くの観測記録を用いることによって、精度が向上するとともに、欠測の影響は小さい。さらに、上記2条の補正を行うことによって、この推定法の利便を一層高めることができる。

(付)

(8)(9)式を得るのに、次の近似式を用いた。確率変数 X 、 Y の平均と標準偏差を $m_x, \sigma_x, m_y, \sigma_y$ として、

$$E[g(X)] \approx g(m_x) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dx^2} g(x) \right]_{m_x} \sigma_x^2, \quad \text{Var}[g(X)] \approx \sigma_x^2 \left[\frac{d}{dx} g(x) \right]_{m_x}^2$$

X と Y が無相関であると仮定し、

$$\text{Var}[XY] = \sigma_x^2 \sigma_y^2 + m_x^2 \sigma_y^2 + m_y^2 \sigma_x^2$$

<参考文献> 1) 矢島：限られた観測記録による確率投資の推定法 土木学会第36回年講、第2部、P775

2) 伊藤、豊田、土木、建築のための確率統計の基礎 丸善

表-1 (8)(9)式の精度の検討

	W_{10}		W_{50}	
	m	σ	m	σ
$t_2=5$	5.79	0.458	6.96	0.615
	5.80	0.470	6.97	0.631
$t_2=10$	5.79	0.323	6.96	0.433
	5.79	0.320	6.95	0.430

上段：(8)(9)式による近似値 (m)

下段：M.C法による推定値 (m)

表-2 (8)(9)と(10)(11)式の比較

	W_{10}		W_{50}	
	m	σ	m	σ
$t_2=5$	5.79	0.458	6.96	0.615
	5.80	0.444	6.97	0.602
$t_2=10$	5.79	0.323	6.96	0.433
	5.80	0.315	6.97	0.425

上段：(8)(9)式による近似値 (m)

下段：(10)(11)式による近似値 (m)