II－305　洪水時逐次流量予測のための統計モデル

東京都立大学工学部　正員　新井邦夫
〃　　　　〃　丸井信雄

1．はじめに

流域開発の進展とともに流量を逐次的に予測する必要が生じてきている。しかしながら、今日までに提案されたモデルのほとんどは、誤差に関する吟味不足のために予測精度を明示できず、この種の要請に正しく答えられない。

筆者等はいわゆる総合貯留関数法について、パラメータに不確定性を配慮し、予測誤差を示す一つの便法を提案した[1]。

一方、継続される観測によって、今日では統計処理が可能になる程、データが集積されつつあると認識されるが、流出モデルに適切な統計手法が導入されれば、予測誤差の導出は容易となる。本研究は、貯留関数法の概念を、統計手法に基づいて具現化しようとしたものである。

2．考え方

貯留関数法は一般に次のようにあらわされる。

$$\frac{dq}{dt}=f(q)\cdot(r-q) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで q，r はそれぞれ流量，雨量で，$f(q)$ に q のベキ乗式が採用されている。

問題は、ある時点までの履歴から、次の時点における予測にあるから、(1)式を次のように差分化する。

$$Q_n-Q_{n-m}=A'\cdot Q_{n-m}^{\alpha'}\cdot(R_{n-T}-Q_{n-m}) \quad \cdots\cdots(2)$$

ここに Q_n, Q_{n-m} はそれぞれ時点 n，$n-m$ における流量，R_{n-T} は時点 $n-T$ における雨量，T は遅れ時間である。

洪水時における流量の逐次予測は、主として増水期間に必要とされるので、(2)式の左辺が正の場合が問題となる。そこで、両辺共正の場合に限定すると、(2)式は次のように一般化でき線型回帰モデルの適用が可能となる。

$$Z=A+\alpha X+\beta Y \quad \cdots\cdots(3)$$

ただし，$Z=\ln(Q_n-Q_{n-m})$，　$X=\ln(Q_{n-m})$，$Y=\ln(R_{n-T}-Q_{n-m})$ である。

X，Y が与えられた時の Z の期待値および分散は、次のように知ることができる。

$$\left.\begin{aligned}&E[Z|X=x,Y=y]=A+\alpha x+\beta y\\&Var[Z|X=x,Y=y]=\sigma_Z^2(1-\rho_{Z\cdot XY}^2)\end{aligned}\right\}(4)$$

ここに，$\alpha=\frac{\sigma_Z}{\sigma_X}\,\frac{\rho_{XZ}-\rho_{XY}\cdot\rho_{YZ}}{1-\rho_{XY}^2}$　，　$\beta=\frac{\sigma_Z}{\sigma_Y}\,\frac{\rho_{YZ}-\rho_{XY}\cdot\rho_{XZ}}{1-\rho_{XY}^2}$

$A=m_Z+\alpha m_X+\beta m_Y$ であり，$\rho_{Z\cdot XY}$ は重相関係数である。したがって，Q_{n-m}，R_{n-T} が与えられた時の Q_n の期待値および分散は，

$$\left.\begin{aligned}&E[Q_n|Q_{n-m},R_{n-T}]=Q_{n-1}+\exp\{E[Z|X=x,Y=y]\}\\&Var[Q_n|Q_{n-m},R_{n-T}]=\{\exp\{E[Z|X=x,Y=y]\}\}^2\cdot\sigma_Z^2(1-\rho_{Z\cdot XY}^2)\end{aligned}\right\}(5)$$

である。実際の計算に当って，遅れ時間 T は重相関係数 $\rho_{Z\cdot XY}$ を最大にする場合の値とすることが自然であろう。

3．実測値への適用

小河内貯水池における観測資料[2]を使った計算結果を示す。図－1には，降雨数15（S47～S52），予測時間 $m=1$，遅れ時間 $T=1$ について，R_{n-1} および $R_{n-1}-Q_{n-1}$ が共に正の場合の Q_{n-1}，$R_{n-1}-Q_{n-1}$ および Q_n-Q_{n-1} の関係を示してある。Q_n-Q_{n-1} が負になる場合が約10%（41/433）およびそれが0となる場合が約41%（178/433）存在することは，3者の付号の間に一義の関係が存在しないことを意味する。しかしながら，ここでは増水傾向の予測に限定しているので，これを無視し Q_n-Q_{n-1} が正の点群にのみ注目する。

(4)式のパラメータを計算し，(5)式の型で示すと次の通りである。

$$\left.\begin{aligned}&E[Q_n|Q_{n-1},R_{n-1}]=Q_{n-1}+0.047\cdot Q_{n-1}^{0.605}\cdot(R_{n-1}-Q_{n-1})^{0.406}\\&Var[Q_n|Q_{n-1},R_{n-1}]=\{0.047\cdot Q_{n-1}^{0.605}\cdot(R_{n-1}-Q_{n-1})^{0.406}\}^2\cdot1.355^2\cdot(1-0.681^2)\end{aligned}\right\}(6)$$

図－2に，実測と予測の比較を示した。流量の増大と共に下方予測の傾向が強くなる。これは，図－1から判断されるように，低流量データが多すぎることが原因である。そこで，$Q_{n-1}\geqq1$ の場合に限って(6)式を求めると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &E\{Q_n|Q_{n-1},R_{n-1}\}=Q_{n-1}+0.065\cdot Q_{n-1}^{0.940}\cdot(R_{n-1}-Q_{n-1})^{0.474} \\ &Var[Q_n|Q_{n-1},R_{n-1}]\doteqdot\{0.065\cdot Q_{n-1}^{0.940}\cdot(R_{n-1}-Q_{n-1})\}^{0.474}\cdot 1.361^2\cdot(1-0.511^2) \end{aligned}\right\}\quad(7)$$

図－２にあわせて示したように予測期待値はかなり改善される。

いずれにしても、予測値の分散が求まっているから、予測範囲を確率的に示すことが可能である。

なお、ピークに達した後、流量は直前のそれに依存すると考えると、上に示した例の場合、次のような関係が得られる。

a） $R_{n-1}>0$, $R_{n-1}<Q_{n-1}$ の場合 （資料数119）

$$\left.\begin{aligned} &E[Q_n|Q_{n-1}]=0.854\cdot Q_{n-1}^{0.963} \\ &Var[Q_n|Q_{n-1}]\doteqdot\{0.854\cdot Q_{n-1}^{0.963}\}^2\cdot 0.956^2(1-0.997^2) \\ &\qquad=0.004\cdot Q_{n-1}^{1.926} \end{aligned}\right\}\quad(8)$$

b） $R_{n-1}=0$ の場合 （資料数 150）

$$\left.\begin{aligned} &E[Q_n|Q_{n-1}]=0.932\cdot Q_{n-1}^{0.986} \\ &Var[Q_n|Q_{n-1}]\doteqdot\{0.932\cdot Q_{n-1}^{0.986}\}^2\cdot 1.484^2(1-0.976^2) \\ &\qquad=0.091\cdot Q_{n-1}^{1.972} \end{aligned}\right\}\quad(9)$$

4. 結論

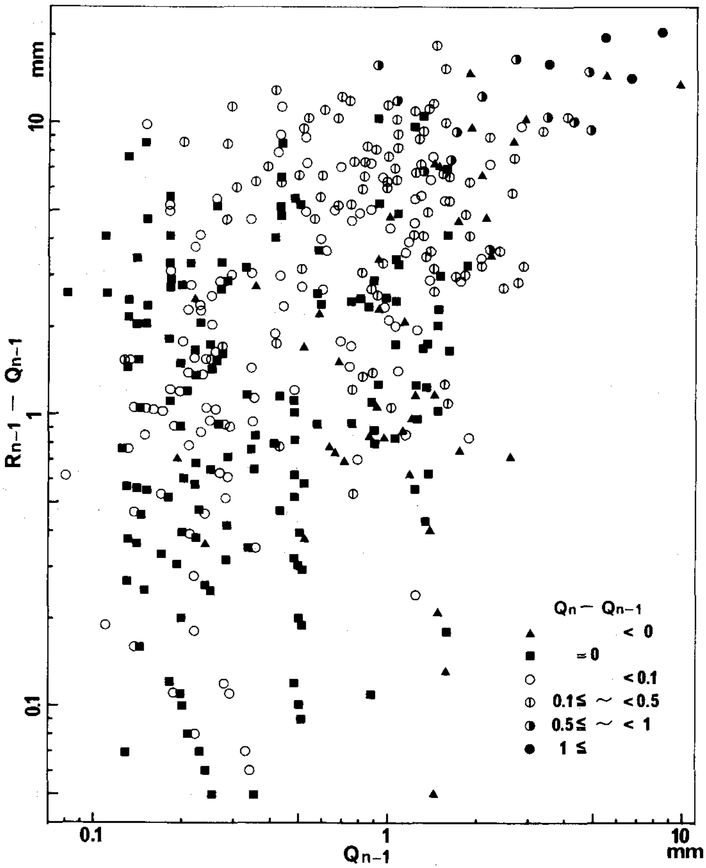
貯留関数法に基づく逐次予測のための統計モデルの考え方を示した。決定論的モデルに比べ、予測誤差を明示できる特色はいうまでもないが、さらに有効降雨算出に伴なう不明瞭さを回避し、与えられる全てのデータを使って機械的にパラメータを決定できることは、このモデルの有利さの一つと考える。

文献

1） 新井邦夫他、流出予測の不確定性 土木学会年講 1980

2） 東京都水道局 小河内貯水池管理年報、1974～1981

図－1 Q_n-Q_{n-1}, Q_n, $R_{n-1}-Q_{n-1}$ の関係



図－2 実測と予測の比較