II-300　水文観測における情報損失

信州大学工学部　正　員　荒木　正夫
信州大学工学部　正　員　寒川　典昭
信州大学大学院　学生員　○新村　亮

1．概　要

流量、降水等水文時系列は本来連続量であるが、観測、記録、計算処理の段階で、さまざまな離散化が施されている。本研究では、このような離散化によって、どの程度、情報が損失するかを特性値ごとに明らかにするためNielsen[1]によって導入された線形損失関数の概念を用い、最適サンプリング間隔を決定するための基準を提供する。

2．時系列の離散化と情報損失

離散化手法として、Point Sampling、Average Samplingを取り上げる。いま、連続系連のもつ真の特性値をα、Δt間隔で離散化した標本系列から得られた推定値を$\hat{\alpha}$とすれば、このときの情報損失Lは、

$$L(\hat{\alpha})=k|\hat{\alpha}-\alpha| \qquad \cdots(1)$$

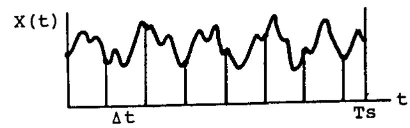

図1．Point Sampling

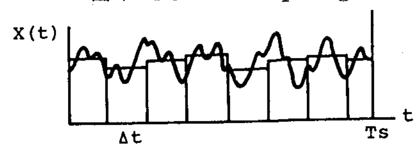

図2．Average Sampling

と表わされる。ただし、kは定数である。ここで、$\hat{\alpha}$は確率変数なので、$\hat{\alpha}$が正規分布をなすと仮定すれば、Lの期待値$\bar{L}$は、

$$\bar{L}(\hat{\alpha};\Delta t)=k[2\{B\Phi(\frac{B}{\sqrt{V}})+\sqrt{V}\phi(\frac{B}{\sqrt{V}})\}-B] \qquad \cdots(2)$$

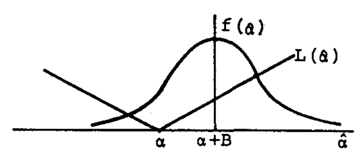

図3．情報損失の定量化

となる。ここで、Φは標準正規確率分布関数、ϕは標準正規確率密度関数、Bは$\hat{\alpha}$のバイアス、Vは$\hat{\alpha}$の分散を表わす。

表1．各特性値に関するバイアスB，分散V

平均	$B[\hat{\mu}]=0.\quad V[\hat{\mu}]=\frac{\Delta t}{Ts}[\sigma^2+2\sum_{i=1}^{Ts/\Delta t-1}(1-\frac{i\Delta t}{Ts})\gamma(i\Delta t)].$
自己共分散	$B[\hat{\gamma}(u)]=-\frac{\Delta t}{Ts}[\sigma^2+2\sum_{i=1}^{Ts/\Delta t-1}(1-\frac{i\Delta t}{Ts})\gamma(i\Delta t)].\quad V[\hat{\gamma}(u)]=\frac{\Delta t}{Ts}[\sigma^4+\gamma(u)^2+2\sum_{i=1}^{(Ts-u)/\Delta t}\{\gamma(i\Delta t)^2+\gamma(i\Delta t-u)\gamma(i\Delta t+u)\}].$
自己共分散の原点上2階導関数	$B[\hat{\gamma}''(0)]=-\frac{1}{\Delta t^2}[\frac{\pi^2}{3}E[\hat{\sigma}^2]+4\sum_{i=1}^{Ts/\Delta t}\frac{(-1)^i}{i^2}E[\hat{\gamma}(i\Delta t)]]-\gamma''(0).$ $V[\hat{\gamma}''(0)]=\frac{1}{\Delta t^4}\sum_{u=0}^{Ts/\Delta t}\sum_{v=0}^{Ts/\Delta t}a_u a_v\{\frac{\Delta t}{Ts}\sum_{i=-\infty}^{\infty}[\gamma(i\Delta t)\gamma((i+u-v)\Delta t)+\gamma((i+u)\Delta t)\gamma((i-v)\Delta t)]\}$ $(a_0=\frac{\pi^2}{3},a_u=4\frac{(-1)^u}{u}\text{ for }u\neq0)$
極値確率	$B[\hat{P}r]=f(\mu_*)^2+\{f(\mu_*)f''(\mu_*)+2f'(\mu_*)^2\}\sigma_*^2+\frac{3}{4}f''(\mu_*)^2\sigma_*^4-Pr\qquad V[\hat{P}r]=f'(\mu_*)^2\sigma_*^2+\frac{1}{2}f''(\mu_*)^2\sigma_*^4$ $f(t)=\Phi(u_s)\exp[-\frac{T\phi(u_s)}{\sqrt{2\pi}\Phi(u_s)}\sqrt{t}]$ $\mu_*=E[\hat{\lambda}_2]=-E[\hat{\gamma}''(0)]$ $\sigma_*^2=V[\hat{\lambda}_2]=E[\hat{\gamma}''(0)]$
平均連数	$B[\hat{\bar{N}}u]=\frac{T}{\sqrt{2\pi}}\phi(u_s)(\mu_*^{1/2}-\frac{1}{8}\mu_*^{-3/2}\sigma_*^2)-\bar{N}u\qquad V[\hat{\bar{N}}u]=\frac{T^2}{8\pi}\phi(u_s)^2(\mu_*^{-1}\sigma_*^2+\frac{1}{8}\mu_*^{-1/3}\sigma_*^4)$
平均連長	$B[\hat{\bar{L}}u]=\sqrt{2\pi}\frac{1-\Phi(us)}{\phi(us)}(\mu_*^{-1/2}+\frac{3}{8}\mu_*^{-5/2}\sigma_*^4)-\bar{L}u\qquad V[\hat{\bar{L}}u]=\frac{\pi}{2}(\frac{1-\Phi(us)}{\phi(us)})^2(\mu_*^{-3}\sigma_*^2+\frac{9}{8}\mu_*^{-5}\sigma_*^4)$
平均連面積	$B[\hat{\bar{S}}u]=\sqrt{2\pi}\frac{\sigma\{\phi(u_s)-u_s(1-\Phi(u_s))\}}{\phi(u_s)}(\mu_*^{-1/2}+\frac{3}{8}\mu_*^{-5/2}\sigma_*^2)-\bar{S}u$ $V[\hat{\bar{S}}_u]=\frac{\pi}{2}[\frac{\sigma\{\phi(us)-us(1-\Phi(us))\}}{\phi(us)}]^2(\mu_*^{-3}\sigma_*^2+\frac{9}{8}\mu_*^{-5}\sigma_*^4)$

さて、長さT_s の時系列をΔt間隔でPoint Samplingしたときの、各特性値に対するB、Vは定常エルゴード性を仮定すると、表1のようになる。また、データが正規分布をなすならば、期間T内での極値確率、平均連数、平均連長、平均連面積は、パワースペクトルの2次モーメントをλ_2、超過基準をu、uを基準化したものをu_s とおくと、

$$\Pr[\max_{0<t<T} X(t) \le u] = \Phi(u_s)\exp[-\frac{T\phi(u_s)}{\sqrt{2\pi}\Phi(u_s)}\sqrt{\lambda_2}] \quad \cdots(3) \qquad \bar{N}_u = T\sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}}\phi(u_s) \quad \cdots(4)$$

$$\bar{L}_u = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_2}}\frac{1-\Phi(u_s)}{\phi(u_s)} \quad \cdots(5) \qquad \bar{S}u = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_2}}\frac{\sigma\{\phi(u_s)-u_s(1-\Phi(u_s))\}}{\phi(u_s)} \quad \cdots(6)$$

と表わされる。これらの式にもとづきB、Vさらに情報損失を求めることができる。

また、Average Samplingは、原系列を時間間隔Δtで移動平均し、さらにΔt間隔でPoint Samplingしたことと等価とみなす。バイアスは移動平均化によるものとPoint Samplingによる成分とに分解され、

$$B[\hat{\alpha}] = B_A[\alpha] + B_E[\hat{\alpha}_A] \quad \cdots(7)$$

となる。ここで、B_E及び分散$V[\hat{\alpha}_A]$は移動平均系列の自己共分散$\gamma_Y(u)$より求めることができる。

3． 実流域への適用

信濃川水系鹿曲川流量系列のうち1973～81年の7、8月のデータ及び、1977年9月～79年8月のデータを2ケ月ずつ6期に分け適用を試みた。染谷、Shannonの標本化定理にもとづき、スペクトル解析を行なった結果、Nyquist間隔Δt_C 4時間で離散化し原系列の自己共分散$\gamma(\tau)$を求めた。これよりPoint Samplingによる情報損失を求め、その結果を表2に示す。極値確率、連特性は真値で除し基準化した。

平均、分散、自己共分散に関してはΔtの増加に従って、損失も緩やかに増大し、一方、極値確率、連の特性に関しては増加は急速で、超過流量が大きい程、立ち上がりが急激となっている。このような現象は特性値の推定における高周波数成分の影響の大小に起因するものであろう。また、情報損失の季節変化をみてみると、その値は3．4月、11.12月、5．6月、1．2月、7．8月、9．10月、の順に小さくなっており、この傾向はどの特性値もほぼ共通している。またこれは各期間の自己共分散の減衰の遅い順にほぼ一致している。

表2．各特性値に関する情報損失

	期間	4.	8.	12.	24.	48.	72.
平均	1. 2	0.185	0.185	0.188	0.198	0.211	0.223
	3. 4	0.189	0.189	0.190	0.201	0.212	0.263
	5. 6	0.214	0.214	0.216	0.225	0.231	0.252
	7. 8	0.144	0.145	0.149	0.161	0.185	0.214
	9.10	0.145	0.145	0.146	0.151	0.171	0.198
	11.12	0.221	0.221	0.222	0.226	0.241	0.260
	73-81	0.195	0.195	0.197	0.205	0.218	0.243
分散	1. 2	0.246	0.247	0.249	0.261	0.293	0.329
	3. 4	0.266	0.266	0.268	0.282	0.312	0.362
	5. 6	0.277	0.277	0.277	0.288	0.307	0.341
	7. 8	0.178	0.181	0.189	0.216	0.271	0.321
	9.10	0.207	0.207	0.208	0.219	0.265	0.317
	11.12	0.275	0.276	0.277	0.283	0.316	0.355
	73-81	0.234	0.236	0.239	0.256	0.294	0.341
自己共分散 γ(48)	1. 2	0.202	0.201	0.201	0.201	0.220	
	3. 4	0.234	0.234	0.234	0.240	0.256	
	5. 6	0.224	0.218	0.215	0.218	0.230	
	7. 8	0.141	0.144	0.148	0.167	0.197	
	9.10	0.148	0.147	0.148	0.153	0.182	
	11.12	0.240	0.236	0.232	0.225	0.240	
	73-81	0.208	0.207	0.208	0.216	0.236	

	期間	4.	8.	12.	24.	48.	72.
極値確率	5. 6	0.255	0.227	0.331	0.650	0.769	0.822
	7. 8	0.064	0.225	0.360	0.594	0.741	0.823
	9.10	0.088	0.122	0.210	0.405	0.584	0.683
	73-81	0.070	0.173	0.275	0.488	0.645	0.730
平均連数	5. 6	0.261	0.222	0.328	0.654	0.776	0.828
	7. 8	0.065	0.224	0.359	0.594	0.740	0.824
	9.10	0.089	0 120	0.208	0.402	0.579	0.675
	73-81	0.115	0.248	0.376	0.604	0.744	0.813
平均連長	5. 6	0.332	0.363	0.577	2.098	3.810	5.441
	7. 8	0.065	0.302	0.585	1.536	3.116	5.157
	9.10	0.092	0.150	0.280	0.716	1.516	2.407
	73-81	0.122	0.355	0.638	1.595	3.118	4.783
平均連面積	5. 6	0.332	0.363	0.577	2.098	3.810	5.441
	7. 8	0.066	0.302	0.587	1.536	3.116	5.157
	9.10	0.092	0.150	0.280	0.717	1.516	2.407
	73-81	0.122	0.355	0.638	1.595	3.118	4.783

超過流量 $10 m^3$／sec

4． あとがき

このようにして、流量時系列の離散化は特性値ごとに、また季節ごとに、その間隔を決定すべきであるということがわかった。また、許容誤差に対し離散化間隔を決定するための1つの基準を提案できた。今後、流域面積、流域特性の変化、及び経年変化に伴う情報損失の挙動を測るとともに、降水データに対するAverage Samplingの適用も行なっていきたい。

1） M. D. Nielsen :Loss of Information by discretizing Hydrologic Series,
H. P. Colorado S. U. Fort Colling Colorado , 1972