II-298　降水頻度分析へのＭＥＰの導入について

信州大学工学部　正員　寒川　典昭
〃　　正員　荒木　正夫
新　潟　県　　正員　甲田　和彦

1．はじめに

著者ら[1]は降水頻度分析へのＭＥＰ（最大エントロピー原理）の導入を検討し，ＳＯＮＵＧＡ[2]の理論を発展させたが，3次モーメント以上を制約条件に加えた場合の適用上の問題点を残していた。本報はモーメントの安定性を吟味しながら多次モーメントまでを制約条件とする確率密度関数の決定法を示し，あわせて実流域への適用をはかろうとするものである。

2．最大エントロピー分布の算定

連続変数ｘについての $[0,\infty)$ でのエントロピー，原点のまわりのｒ次のモーメント，確率の規格化条件は次式で表わされる。

$$H=-\int_0^\infty p(x)\ln p(x)dx \quad \ldots(2.1) \qquad \mu'_r=\int_0^\infty x^r p(x)dx,\ r=1,2,\ldots,N \quad \ldots(2.2) \qquad \mu'_0=1 \quad \ldots(2.3)$$

ここで，ｐ（ｘ）（≥ 0）は確率密度関数である。さて，（2．2），（2．3）式を制約条件として（2．1）式を最大にするｐ（ｘ）を求めることは，モーメントによって与えられる情報以外はできるだけ一様となるｐ（ｘ）を決定することである。言い換えるとｘはできるだけランダムに発生するが，その発生の仕方がモーメントによって規定されるということである。我々は降水頻度分析のための確率密度関数の決定に，このような立場をとることは妥当かつ自然であると考える。そこで，この問題をラグランジュの未定乗数法によって解くとｐ（ｘ）の推定値 $\hat{p}$（ｘ）は

$$p(x)=\exp\left(-\sum_{i=0}^{N}\lambda_i x^i\right),\ 0\leq x<\infty \qquad \ldots(2.4)$$

となり，上式に含まれるラグランジュ乗数 λ_i，λ_0 は次の方程式を解くことによって求められる。

$$\mu'_r\left[\int_0^\infty \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x^i\right)dx\right]=\int_0^\infty x^r\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x^i\right)dx,\ r=1,2,\ldots,N \qquad \ldots(2.5)$$

$$\lambda_0=\ln\left\{\int_0^\infty \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x^i\right)dx\right\} \qquad \ldots(2.6)$$

具体的に，（2．5）式の方程式を解くには λ_i の近似値を α_i，残差を ε_i とおいて次の連立方程式を解くことにより α_i を逐次修正していく方法をとる。

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\varepsilon_j=q_i \qquad \ldots(2.7)$$

ここで，

$$p_{ij}=c_{i+j}-\mu'_r c_j,\quad q_i=c_i-\mu'_i c_0,\ i,j=1,2,\ldots,N \qquad c_s=\int_0^\infty x^s\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x^i\right)dx,\ s=0,1,\ldots,2N$$

ただし，（2．4）式の最大エントロピー分布が存在するためには最大次数であるＮ次モーメントに対して次の制約条件を満たさなければならない。[3]

$$\mu'_N\leq\mu'_{N,max}=\int_0^\infty x^N\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i x^i\right)dx \quad \ldots(2.8)$$

$$\mu'_N>\mu'_{2i,min}=-\begin{vmatrix}1 & \mu'_1 & \cdots & \mu'_i\\ \mu'_1 & \mu'_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \mu'_i & & & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & \mu'_i & \cdots & \mu'_{i-1}\\ \mu'_1 & \mu'_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \mu'_{i-1} & & & \mu'_{2(i-1)}\end{vmatrix}^{-1} \quad \ldots(2.9)$$

又　ｐ（ｘ）は次のように標準化して取り扱う。

$$x=(\mu'_1/\mu'_0)y \quad \ldots(2.10) \quad , \quad p(x)=\left\{(\mu'_0)^2/\mu'_1\right\}q(y) \quad \ldots(2.11)$$

従って，$p(y)$は原点に関して次のモーメント

$$m_r=(\mu'_0/\mu'_1)^r(\mu'_r/\mu'_0) \qquad \ldots(2.12)$$

をもち，$m_0=m_1=1$となる。

3．適用結果と考察

図－1は確率密度関数が

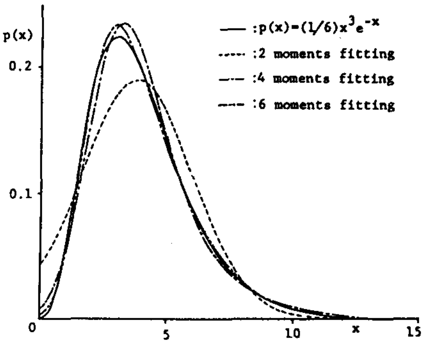
$$p(x)=(1/6)x^3e^{-x} \qquad \ldots(3.1)$$

で与えられるガンマ分布の2，4，6モーメントフィッチングを示したものである。この図よりSONUGAの提案した2モーメントフィチングでは不十分であり，4次モーメントまでを制約条件に加えることの必要性が認識される。図―2は(3．1)式の分布を母集団としてデータを発生させた場合のデータ数に対するm_4の安定性を検討したものである。データ数の増加にしたがって，緩やかではあるがモーメントの安定してくる様子がうかがわれる。表―1は(3.1)式から得られる3次モーメントまでを用い，4次モーメントを変動させた場合のラグランジュ乗数の感度を調べたものである。表中•印は(3.1)式の4次モーメントを示している。図－2と表－1から4次モーメントの推定誤差と，それがラグランジュ乗数に召ぼす影響を読み取ることができる。一方，4次モーメントの推定誤差が確率密度関数の形をどの程度変化させるかについては講演時に示すことにする。

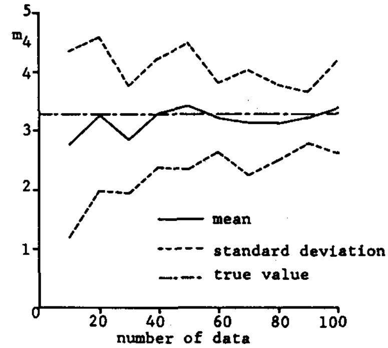
図－3は前述の方法に従って実測データから確率密度関数を決定したものであり，4モーメントフィッチングがよくその頻度図の傾向をとらえていることがわかる。

4．あとがき

ここでは(3.1)式で与えられたガンマ分布の1つを母集団とみなして，最大エントロピー分布を議論したが，他の分布についても同様な結果を得ている。本稿により，降水頻度分析へのMEP導入の妥当性と適用方法を明らかにすることができたのではないかと考えている。



図－1　ガンマ分布の最大エントロピーフィッチング



図－2　4次モーメントの安定性

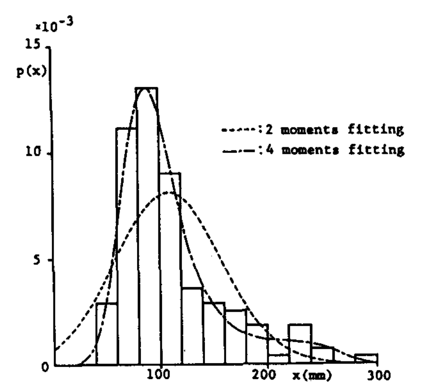
表－1　4次モーメントを変動させた場合のモーメント問題の解の感度

m_4 \ λ_i	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
3.20	7.94	-30.75	39.41	-19.71	3.44
3.25	4.24	-13.86	15.06	-6.13	0.90
•3.28	3.43	-10.05	9.69	-3.30	0.41
3.30	3.14	-8.73	7.89	-2.40	0.26
3.35	2.74	-6.96	5.63	-1.35	0.11
3.40	2.58	-6.27	4.83	-1.03	0.071
3.45	2.48	-5.88	4.41	-0.87	0.055
3.50	2.41	-5.61	4.13	-0.77	0.045
3.55	2.35	-5.39	3.90	-0.69	0.038
3.60	2.31	-5.22	3.72	-0.63	0.033
4.00	2.09	-4.39	2.89	-0.36	0.013
4.50	1.98	-3.96	2.46	-0.23	0.0058
5.00	1.69	-2.68	1.07	0.22	-0.013
5.50	1.24	-0.49	-1.49	1.10	-0.051
6.00	0.76	2.21	-4.87	2.34	-0.11

1）荒木，寒川，小山：Shannon流情報理論による確率密度関数の決定；土木学会中部支部研究発表会講演概要集，昭和57年2月。

2)SONUGA : Principle of Maximum Entropy in Hydrologic Frequency Analysis ; Journal of Hydrology 17 , 1972.

3)EINBO : On the Existence of a Class of Maximum-Entropy Probability Density Function ; IEEE TRANSFORMATION OF INFORMATION THEORY , NOVENBER 1977.



図－3　天竜川流域の最大エントロピーフィッチング