

神戸大学工学部 正員 神田 徹
兵庫県 正員 山内 良太

1. まえがき

時間単位が比較的短い流量時系列を模擬発生するために、ショットノイズモデルが提案されている^{1),2)}。そのモデル・パラメータは時系列の母集団積率の関数で与えられるが、実際には母集団積率は限られた期間の流量時系列（標本）から推定するので、標本積率の母集団積率に対する偏りを補正する必要がある。本研究では、各積率について標本分布および偏りを計算機数値実験で求め、不偏推定値を得るための補正式に関して検討した。

2. ショットノイズ過程の基礎特性

ショットノイズ過程は (1) 式で定義され、このモデルで作成される連続的過程の変量 $X(t)$ は (2) 式のガンマ分布に従う。

$$X(t) = \sum_{m=N(-t)}^{N(t)} y_m \exp\{-b(t-\tau_m)\} \quad (1)$$

$$f\{X(t)\} = (1/\theta) \{1/\Gamma(\nu/b)\} \{X(t)/\theta\}^{\nu/b-1} \exp\{-X(t)/\theta\} \quad (2)$$

ここに、 $N(t)$ は事象発生率 ν のポアソン過程、 y は降雨量に相当するもので平均値 θ の指数分布に従い、 b は低減率である。実際の流量資料は (3) 式のように期間 T における平均値 X_t として与えられる。この平均化過程 $\{X_t\}$ の積率とモデル・パラメータ ν, b, θ の関係は (4)~(7) 式で与えられる。

$$X_t = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(s) ds \quad (3)$$

$$\text{平均値: } \mu = E\{X_t\} = \nu\theta/b \quad (4) \quad \text{分散: } \sigma^2 = \text{Var}\{X_t\} = (\nu\theta^2/b) \cdot 2\{bT - (1-e^{-bT})\} / (bT)^2 \quad (5)$$

$$\text{歪み係数: } \beta = C\{X_t\} = 3(b/\nu)^{1/2} \{bT - (1-e^{-bT}) - (1/2)(1-e^{-bT})^2\} / [2\{bT - (1-e^{-bT})\}^3]^{1/2} \quad (6)$$

$$\text{lag-1自己相関係数: } \rho_1 = \rho\{X_t, X_{t+1}\} = (1-e^{-bT})^2 / [2\{bT - (1-e^{-bT})\}] \quad (7)$$

3. 模擬発生資料の標本特性

$b=0.1, 0.3, 0.5(0.5)3.0, \nu=0.5(0.5)3.0, \theta=1.0$ として、 b, ν, θ の各組合せについて X_t (平均化区間 $T=1$) を 500,000 個づつ発生した。標本の大きさは $n=10(20)90$ とし、従って標本はそれぞれ 50,000 組, 18,500 組, 10,000 組, 7,000 組, 5,500 組得られた。このとき各標本 ($X_1, X_2, \dots, X_n$) について平均値 m , 分散 s^2 , 標準偏差 s , 歪み係数 C_s , lag-1 の自己相関係数 r_1 を計算する。ここに各統計量の定義は次の通りである。

$$m = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i \quad (8)$$

$$s^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \quad (9)$$

$$C_s = (1/n) \sum_{i=1}^n (X_i - m)^3 / s^3 \quad (10)$$

$$r_1 = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i)(X_{i+1} - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1})}{\left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i)^2 \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1})^2 \right\}^{1/2}} \quad (11)$$

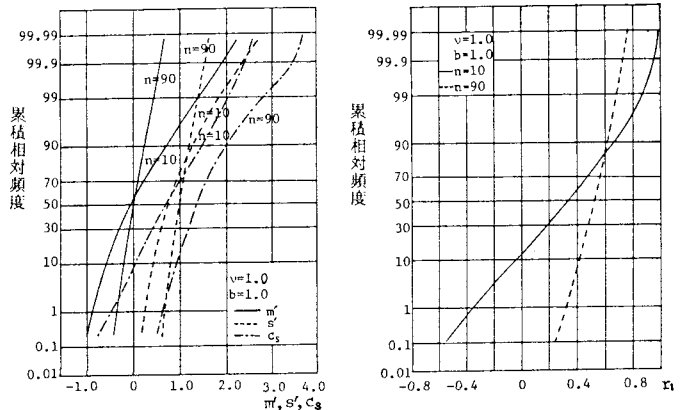


図 - 1 m', s', C_s, r_1 の分布

3.1 標本分布

$n = 10, 90$ の場合の m' , s' , C_s , r_1 の分布を図-1に示す。ここに、 m' , s' は標準化変量 $(X_i - \mu) / \sigma$ に関するもので、 $m' = (m - \mu) / \sigma$, $s' = s / \sigma$ 。 n が小さい場合には m' , s' の分布は歪りが大きく歪んでいるが、 $n = 90$ ではほぼ正規分布である。 m' の分布は ν によって変らず、 b が大きくなるとばらつきが小、すなわち標本ごとの差が小さい。 s' は ν が大きくなると標本ごとのばらつきが小さく、また s' の分布は b によってほとんど変らない。 C_s は ν が大きくなれば、また b が小さくなれば小さい値をとる。 n が小さい場合は C_s は広い範囲の値をとり、特に小さい値 (負の値を含む) をとる標本も多くなる。 r_1 には ν は関係せず、 b が大きくなれば小さい値をとる。また C_s と同様に n が小さい場合に r_1 は小さい値をとる割合が多い。

3.2 偏り補正

統計量 S の期待値 $E\{S\}$ とその母数 P の関係が (12) 式で表わされるとき、 P の不偏推定値 $\hat{P}$ は (13) 式で与えられる。

$$\alpha \cdot E\{S\} = P \quad (12) \quad \hat{P} = \alpha S \quad (13)$$

ここに、 α は偏り補正係数とよばれる。上述の積率について α を求めた。

平均値に対する偏り補正係数 $\alpha(\mu)$ は全てのパラメータ b, ν, θ, n に無関係に 1 である。分散の補正係数 $\alpha(\sigma^2)$ を表-1 に示す。この分散の偏りに対して (14) 式を適用し³⁾、母分散への近似度を (15) 式によってしらべた結果が表-2 である。ここに、 $e(\sigma^2)$ は母分散 σ^2 を基準とした $\hat{\sigma}^2$ の相対誤差 (%) である。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n/(n-1)}{1 - \frac{2\rho_1}{n(n-1)} \left\{ \frac{n(1-\rho_1) - (1-\rho_1^n)}{(1-\rho_1)^2} \right\}} s^2 \quad (14)$$

$$e(\sigma^2) = \{(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) / \sigma^2\} \times 100 (\%) \quad (15)$$

$n \geq 30, b \geq 1.0, \nu \geq 0.3$ では $e(\sigma^2)$ の最大値は 2.75% であり、(14) 式はきわめて良好な偏り補正式とみなせる。

同様に、歪み係数の偏り補正係数 $\alpha(\beta)$, lag-1 の自己相関係数の偏り補正係数 $\alpha(\rho_1)$ をそれぞれ表-3, 5 に示し、また補正式 (16), (18)⁴⁾ を用いた場合の相対誤差 (%) を表-4, 6 に示す。

$$\hat{\beta} = \frac{\{n(n-1)\}^{1/2}}{n-2} \left(1 + \frac{8.5}{n}\right) C_s \quad (16)$$

$$\hat{\rho}_1 = \{r_1 + 1/(n-1)\} / \{1 - 3/(n-1)\} \quad (18)$$

$$e(\beta) = \{(\hat{\beta} - \beta) / \beta\} \times 100 (\%) \quad (17)$$

$$e(\rho_1) = \{(\hat{\rho}_1 - \rho_1) / \rho_1\} \times 100 (\%) \quad (19)$$

相対誤差 $e(\beta)$ は $n \geq 30, b \geq 1.0, \nu \geq 1.0$ では 5% 以内であり、また相対誤差 $e(\rho_1)$ は $n \geq 30, \nu \geq 0.3$ では 10% 以内で、いずれの式も適用範囲に制限があるが実用的に十分の推定精度をもつといえよう。

参考文献 1) Weiss, G.: Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data, W.R.R., Vol. 13, No. 1, 1977. 2) 神田 徹・牧 龍一郎: ショット・ノイズ過程の流量時系列への適用, 土木学会関西支部年講, 1981. 3) Matalas, N.C.: Time series analysis, W.R.R., Vol. 3, No. 3, 1967. 4) Kendall, M.G.: Note on the bias in the estimation of autocorrelation, Biometrika, Vol. 42, 1954.

表-1 $\alpha(\sigma^2)$

表-2 $e(\sigma^2)$ (%)

b	ν	sample size n			b	ν	sample size n		
		10	50	90			10	50	90
1.0	0.1	1.407	1.134	1.107	0.1	-0.52	-5.70	-6.26	
	0.3	1.335	1.064	1.037	0.3	4.88	0.63	0.09	
	0.5	1.331	1.060	1.036	0.5	5.21	0.92	0.25	
	1.0	1.330	1.060	1.037	1.0	5.24	0.93	0.16	
	1.5	1.326	1.059	1.035	1.5	5.57	1.01	0.35	
	2.0	1.324	1.059	1.034	2.0	5.96	1.02	0.44	
	2.5	1.316	1.050	1.025	2.5	6.39	1.88	1.27	
	3.0	1.312	1.051	1.026	3.0	6.71	1.85	1.23	
2.0	0.1	1.246	1.083	1.068	0.1	-1.76	-4.00	-4.32	
	0.3	1.220	1.054	1.037	0.3	0.31	-1.36	-1.45	
	0.5	1.196	1.033	1.016	0.5	2.39	0.18	0.62	
	1.0	1.200	1.036	1.020	1.0	0.36	0.48	0.29	
	1.5	1.202	1.036	1.021	1.5	1.92	0.40	0.13	
	2.0	1.196	1.032	1.016	2.0	2.41	0.79	0.60	
	2.5	1.199	1.034	1.019	2.5	2.17	0.65	0.37	
	3.0	1.190	1.028	1.012	3.0	2.89	1.23	1.03	

表-3 $\alpha(\beta)$

表-4 $e(\beta)$ (%)

b	ν	sample size n			b	ν	sample size n		
		10	50	90			10	50	90
1.0	0.1	2.925	1.571	1.369	0.1	-24.99	-28.19	-12.74	
	0.3	2.253	1.324	1.199	0.3	-2.64	-8.86	-7.17	
	0.5	2.176	1.281	1.181	0.5	0.84	-5.78	-5.75	
	1.0	2.166	1.260	1.166	1.0	1.27	-4.18	-4.50	
	1.5	2.167	1.241	1.148	1.5	1.22	-2.81	-3.04	
	2.0	2.197	1.242	1.145	2.0	-0.16	-2.87	-2.75	
	2.5	2.178	1.222	1.129	2.5	0.73	-1.23	-1.38	
	3.0	2.187	1.231	1.140	3.0	0.32	-1.98	-2.36	
2.0	0.1	2.774	1.537	1.364	0.1	-20.92	-21.52	-18.40	
	0.3	2.111	1.299	1.194	0.3	3.95	-7.14	-6.74	
	0.5	2.006	1.252	1.161	0.5	9.36	-3.66	-4.14	
	1.0	1.979	1.214	1.130	1.0	10.86	-0.64	-1.50	
	1.5	1.980	1.210	1.132	1.5	10.80	-0.31	-1.65	
	2.0	1.998	1.198	1.128	2.0	9.82	0.70	-1.36	
	2.5	2.004	1.197	1.128	2.5	9.46	0.81	-1.28	
	3.0	2.012	1.197	1.126	3.0	9.06	0.76	-1.15	

表-5 $\alpha(\rho_1)$

表-6 $e(\rho_1)$ (%)

b	ν	sample size n			b	ν	sample size n		
		10	50	90			10	50	90
1.0	0.1	0.898	1.012	0.999	0.1	97.82	9.26	5.72	
	0.3	1.303	1.072	1.042	0.3	45.80	3.35	1.47	
	0.5	1.448	1.072	1.041	0.5	34.30	3.35	1.60	
	1.0	1.588	1.080	1.043	1.0	25.16	2.59	1.33	
	1.5	1.646	1.087	1.049	1.5	21.83	2.04	0.82	
	2.0	1.673	1.089	1.050	2.0	20.35	1.85	0.75	
	2.5	1.683	1.083	1.045	2.5	19.80	2.32	1.18	
	3.0	1.698	1.090	1.051	3.0	19.04	1.71	0.69	
2.0	0.1	0.671	1.011	0.997	0.1	174.14	12.02	7.38	
	0.3	1.302	1.083	1.045	0.3	65.83	5.00	2.54	
	0.5	1.643	1.102	1.058	0.5	41.90	3.28	1.36	
	1.0	1.938	1.108	1.057	1.0	28.03	2.74	1.45	
	1.5	2.096	1.121	1.070	1.5	22.20	1.67	0.23	
	2.0	2.150	1.123	1.067	2.0	20.39	1.50	0.54	
	2.5	2.212	1.121	1.069	2.5	18.43	1.62	0.35	
	3.0	2.226	1.130	1.074	3.0	18.01	0.89	-0.08	