

東京大学大学院 学生員 ○池谷 毅  
 東京大学工学部 正員 玉井 信行

1. はじめに

縦渦は幅の広い開水路流れに普遍的に存在する現象であり、その発生機構の解明は、河川水理学上重要である。中川・苅津・富永<sup>(1),(2)</sup>は、縦渦が安定して存在する河床条件のもとで、精密な乱流計測を行い、実験的に縦渦の発生機構を論じた。一方、黒木・岸<sup>(3)</sup>は、理論的に縦渦の安定性・構造について論じた。本報告では、河床粗度の横断方向の非一様性に起因する縦渦を対象とし、乱流モデルに河床粗度の条件を取り入れて解析を行い、縦渦の発生機構・構造について検討を行った。

2. 基礎方程式

基礎方程式には、黒木・岸がレイノルズ方程式・連続方程式より導いた式を用いた。すなわち、定常の場合には、流速分布を決定する方程式は、式(1)で示される。

$$\left. \begin{aligned} \rho \dot{\lambda} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_{xx}}{dz} &= 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{dU}{dz} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (T_{zz} - T_{yy}) &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

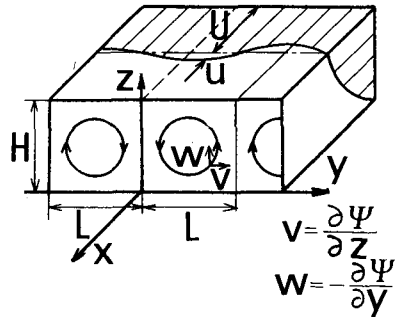


図1 座標系・記号の定義

ここに、 $\rho$ :水の密度、 $g$ :重力加速度、 $\dot{\lambda}$ :河床勾配、 $T_{ij}$ :応力、大文字:主流の諸量、小文字:2次流の諸量。(他は図1参照。)

3. レイノルズ応力のモデル化

せん断応力項については、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} T_{xz} + T_{zx} &= \rho(\hat{\epsilon}_z + \nu) \frac{\partial(U+u)}{\partial z} \\ T_{xy} &= \rho(\hat{\epsilon}_y + \nu) \frac{\partial u}{\partial y} \\ T_{yz} &= \rho(\hat{\epsilon}_z + \nu) \frac{\partial v}{\partial z} + \rho(\hat{\epsilon}_y + \nu) \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし、} \hat{\epsilon}_z &= \epsilon_z (1 + \beta \cos \pi y/L) = K u_* z (1 - z/H) (1 + \beta \cos \pi y/L) \\ \hat{\epsilon}_y &= \epsilon_y (1 + \beta \cos \pi y/L) = \delta \hat{\epsilon}_z \end{aligned} \right\} (3)$$

ここに、 $K$ :カルマン定数、 $u_*$ :摩擦速度(=  $g \lambda H$ )、 $\nu$ :分子粘性係数、 $\beta$ :正の定数( $\beta \ll 1$ )、 $\delta$ :定数( $\delta > 1$ )

ここで、渦動粘性係数には、運動量が変動速度のz成分により輸送される場合には $\hat{\epsilon}_z$ 、y成分により輸送される場合には $\hat{\epsilon}_y$ を用いる。変動速度のy成分はz成分より大きいことから、 $\hat{\epsilon}_y$ は $\hat{\epsilon}_z$ の $\delta$ 倍とする。

また $(1 + \beta \cos \pi y/L)$ は、河床粗度のy方向の周期的な変化を表現する項である。縦渦が安定する河床条件として、図2に示される2種類が知られている。式(3)の表現はこの2種類の河床粗度に共に適用できる。

すなわち、粗度の変化に伴い $u_*$ がy方向に変化すると考えればCASE Iに、zを固体壁面からの距離と考えると、zがy方向に変化すると考えればCASE IIに対応する。このとき図2に示すように、渦動粘性係数 $\epsilon$ が大なる領域で下降流、 $\epsilon$ が小なる領域で上昇流というCASE I, IIに共通な関係が得られ、これは実験と一致する。

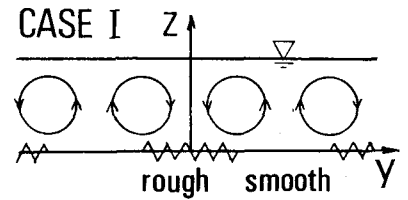


図2 河床粗度と渦動粘性係数

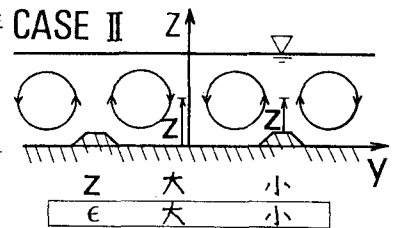


図2 河床粗度と渦動粘性係数

$\beta \ll 1$ , 2次流速  $\ll$  主流速 という条件を用いて高次項を無視すれば, せん断応力項は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \rho(\epsilon_z + \nu) dU/dz & \tau_{xy} &= \rho(\epsilon_y + \nu) \partial u/\partial y \\ \tau_{yz} &= \rho \epsilon_z \beta dU/dz \cos \pi y/L + \rho(\epsilon_z + \nu) \partial u/\partial z \\ \tau_{yz} &= \rho(\epsilon_z + \nu) \partial^2 \psi/\partial z^2 - \rho(\epsilon_y + \nu) \partial^2 \psi/\partial y^2 \end{aligned} \right\} (4)$$

また, 直応力項については, 次式を仮定する.

$$\tau_{zz} - \tau_{yy} = \alpha \tau_{xz} \quad (\alpha = 1.0) \quad (5)$$

#### 4. 解析

式(1), (3), (4), (5)より, 2次流を決定する方程式系は次の線型常微分方程式となる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{L} \frac{dU}{dz} \psi_0 - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (\epsilon_y + \nu) u_0 + \frac{d\epsilon_x}{dz} u_0' + (\epsilon_z + \nu) u_0'' + \frac{d}{dz} (\epsilon_z \beta \frac{dU}{dz}) &= 0 \\ \left\{ \alpha \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{dU}{dz} - \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 (\epsilon_y + \nu) - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{d^2 \epsilon_y}{dz^2} \right\} \psi_0 - 2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{d\epsilon_y}{dz} \psi_0' \\ + \left\{ -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (\epsilon_z + \epsilon_y + 2\nu) - \frac{d^2 \epsilon_x}{dz^2} \right\} \psi_0'' - 2 \frac{d\epsilon_x}{dz} \psi_0''' - (\epsilon_z + \nu) \psi_0'''' - \alpha \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 (\epsilon_y + \nu) u_0 &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

ただし,  $dU/dz = u_*^2 (1 - z/H)/(\epsilon_z + \nu)$ ,  $\psi = \psi_0(z) \sin \pi y/L$ ,  $u = u_0(z) \cos \pi y/L$ .

境界条件は次のとおりとする.

$$\left. \begin{aligned} \text{水底 } z = \delta & \quad u = v = w = 0 \\ \text{水面 } z = H & \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = w = 0 \end{aligned} \right\} (7)$$

#### 5. 計算結果・考察

$\nu/u_*H = 0.002$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $L/H = 1$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $\gamma = 1.5$  として計算をした結果を図3の実線で示す. 中川・祢津・富永の<sup>(1), (2)</sup>実験結果を図3の破線で示す. 計算値は,  $\beta$ の値に比例するため, 実験値には適当なスケールングがしてある. 実験値は, 空気流・管路によるものであり, 実験条件は, 解析に用いられた条件とは厳密には一致しない. しかし, 計算値は実験値をかなり良く再現しており, 解析に用いられたモデルは, 縦渦の構造を妥当に表現していると考えられる. 特に, 回転方向については, 渦動粘性係数が大きな領域, すなわち, 図2の河床粗度条件の場合には, 粗面上あるいは凹部で下降流が生じる向きとなり, 実験事実と一致する. 中川・祢津・富永<sup>(2)</sup>は, 縦渦流れにおける $\tau_{xy}$ の重要性を指摘している. 本解析においては,  $\delta$ の値が応力・流速の各成分間の比を決めている. 実験値を再現するためには,  $\delta \approx 1.5$ が適当であり, 計算上も, 縦渦の発生機構の中で,  $\tau_{xy}$ が重要な役割を持っていることが確認された.

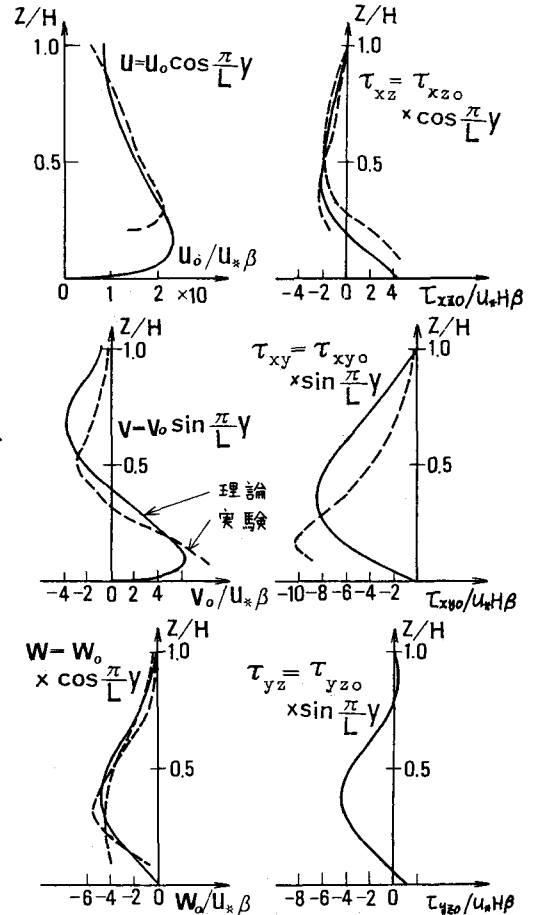


図3 2次流の諸量

#### <参考文献>

- 1) 中川・祢津・富永, 京大防災研年報, 第24号B2, 1981.
- 2) 中川・祢津・富永, 第26回水理講演会論文集, 1982.
- 3) 黒木・岸, 土木学会論文報告集, 第312号, 1981.