

京都大学大学院 学生員 大久保 清久
 京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗
 京都大学大学院 学生員 細田 尚

1. はじめに; 本研究は、Lagrange 的時間スケール T_L と Euler 的乱れ特性量との関係について、Corrsin の関係式を用いた解析を行い、その結果を日野⁽²⁾が行った乱流拡散のシミュレーションによって検討したものである。

2. 基礎式; 空間座標を $\chi(\chi, y, z)$, その方向の流速を $u(u, v, w)$ とする。x 方向の Lagrange 的速度の相関係数 $R_L(t-t_0)$ は、次のように表わされる。

$$\langle u^2 \rangle R_L(t-t_0) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \langle u(\chi, t) \cdot u(\chi_0, t_0) \psi(\chi - \chi_0, t - t_0) \rangle d\chi \quad (1)$$

ここに、 $\psi(\chi - \chi_0, t - t_0) = \delta(\chi - \chi_t)$, χ_t ; t_0 に χ_0 に存在した流体粒子の t での座標, $\langle \rangle$; アンサンブル平均を表す。Corrsin は $\langle u(\chi, t) \cdot u(\chi_0, t_0) \psi(\chi - \chi_0, t - t_0) \rangle \doteq \langle u(\chi, t) u(\chi_0, t_0) \rangle \langle \psi(\chi - \chi_0, t - t_0) \rangle$ と仮定し、

$$R_L(t-t_0) \doteq \iiint_{-\infty}^{\infty} R_E(\chi, t | \chi_0, t_0) G(\chi, t | \chi_0, t_0) d\chi \quad (2)$$

を導いている。ここに、 $G(\chi, t | \chi_0, t_0) = \langle \psi(\chi - \chi_0, t - t_0) \rangle$, $R_E(\chi, t | \chi_0, t_0)$; u の時空間相関係数。

(2) 式は、Robert⁽³⁾によって DI 近似を用いて導びかれることが示されている。本研究では簡単のため、さらには後節でのシミュレーションとの対応を考えて、一次元的に取り扱うため、次のような仮定を設ける。

仮定① $R_E(\chi, t | \chi_0, t_0) = R_{Ex}(\chi - U_0 t - \chi_0) \cdot R_{Ey}(y - y_0) \cdot R_{Ez}(z - z_0) \cdot R_0(t - t_0)$ と表わされる。(U_0 : 一流速)

② さらに、 $R_{Ey}(y - y_0) = R_{Ez}(z - z_0) = 1$ である。

①, ②より、(2)式は、

$$R_L(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Ex}(\chi - U_0 t - \chi_0) R_0(t) C(\chi - \chi_0, t - t_0) d\chi, \quad C(\chi - \chi_0, t - t_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(\chi, t | \chi_0, t_0) dy dz \quad (3)$$

となる。以後、(3)式を基礎式とする。

3. 一様な乱気場のモデル; $R_{Ex}(\chi - U_0 t - \chi_0) R_0(t - t_0)$ は、 U_0 で動く座標系では図-1 のようになる。 R_{Ex} , R_0 の関数形を次式で与える。

$$R_0(t) = \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} R_{Ex}(x_1) \exp(-ikx_1) dx_1 = \frac{L_E}{1 + (kL_E)^2} \quad (4)$$

ここに T_0 ; $R_0(t)$ の積分スケール, L_E ; $R_{Ex}(x_1)$ の積分スケール, k ; 波数 である。

以後 x_1 を x と書く。

4. 解析方法と結果; Saffman⁽⁴⁾と同様に、

$$C(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle x'^2(t) \rangle}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \langle x'^2(t) \rangle}\right) \quad (5)$$

とおいて、(4), (5)式を(3)式へ代入し、無次元化すると、

$$R_L(t) = C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + k'^2} \exp(-t') \exp\left(-\frac{k'^2 \langle x'^2(t') \rangle}{2} \frac{\langle u^2 \rangle T_0^2}{L_E^2}\right) dk' \quad (6)$$

となる。ここに、 $t' = t/T_0$, $x' = x/L_E$, $\langle x'^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle / \langle u^2 \rangle T_0^2$, $k' = kL_E$ である。その結果、 $R_L(t')$

は Euler 的乱れ特性量で作られる無次元化パラメータ $\alpha = L_E / \sqrt{\langle u^2 \rangle} T_0$ で規定されることがわかる。(6)式は

Taylor の理論⁽⁵⁾より得られる

$$R_L(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \langle x'^2(t) \rangle}{dt'^2} \quad (7)$$

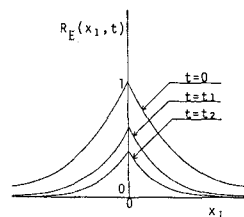


図-1

と連立して解くことができるが、一般には容易に求めることはできない。そこで本研究では、次のような収束計算を行なった。まず収束計算の $n=0$ の値として、

$\langle X^2(t) \rangle$ の $t \rightarrow 0$ において成立する $\langle X^2(t) \rangle = \frac{L_E^2}{\sqrt{\langle u^2 \rangle T_0}}$ の

$R_0(t)$ を求め、これを(6)式に用いて $n=1$ の $\langle X^2 \rangle$ 、(6)式より次のステップの $R_1(t)$

を求める。この操作を収束するまで繰り返した。計算過程を $\alpha=1$ に対して図-2(4)曲に示したが、 $n=5$ で十分に収束しているのがわかる。次に求められた $R_5(t)$ を、パラメータ α に対して示したのが図-3であり、 α が大きくなるにつれて $R_5(t)$ は $R_0(t)$ に漸近している。これは計算結果より求めた T_L/T_0 を α に対して示した図-4からも明らかで、 α の増加とともに T_L/T_0 は増加し、1 に漸近する。また $\alpha > 10$

では、ほぼ $T_L \approx T_0$ とみなすことができる。図中、破線は従来より用いられている

$T_L = 0.4 L_E / \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ であり、定性的には一致する。

5. 数値実験による検討； 解析結果の検討

をするため、3節で述べた乱流のモデルを、日野が行った拡散のシミュレーション法を用いて計算した。粒子の追跡を行うとき、粒子

の変位を $X(t)$ と表わすと、粒子の速度 u_L は、 $u_L = dX/dt$ となり、これを前節と同様に、 $u_L' = u_L / \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ 、 $X' = X/L_E$ 、 $t' = t/T_0$ と無次元化する。

$$u_L' = \frac{L_E}{\sqrt{\langle u^2 \rangle T_0}} \frac{dX'}{dt'} = \alpha \frac{dX'}{dt'} \quad (7)$$

となり、無次元化パラメータ α が表われる。図-5, 6に、粒子40個を平均した $\alpha=1$ に対する u_L のスペクトルと $\langle X^2 \rangle$ を示した。図中、実験は、対応している4節での結果である。シミュレーションは、 $\Delta f, \Delta k$ のとり方で結果に若干の違いがみられるが、前節までの解析結果とほぼ一致している。

6. おわりに； 本研究の結果として、無次元化 Lagrange 的時間スケール T_L/T_0 が、Euler 的乱流特性量の無次元量である $L_E/\sqrt{\langle u^2 \rangle T_0}$ の関数となることが示され、 $L_E/\sqrt{\langle u^2 \rangle T_0} > 10$ となれば、 $T_L \approx T_0$ となることがわかった。今後、多次元に拡張するとともに、実験的な検討も加えたい。

なお、数値計算等に多大な御協力をいただいた、野口好夫氏に深く感謝の意を表します。

参考文献 1) Corrsin, S.; Advances in Geophysics, Vol. 6, 1959
2) 日野幹雄他；第20回水理講演会講演集, 1975 3) Roberts, P.H.; J. Fluid Mech, Vol. 11, 1961 4) Saffman, P.G.; Appl. Sci. Res. A, Vol. 11, 1963 5) Taylor, G.T.; Proc. London Math. Soc. Ser. 2, Vol 20, 1921

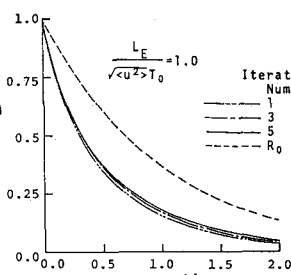


図-2(a)

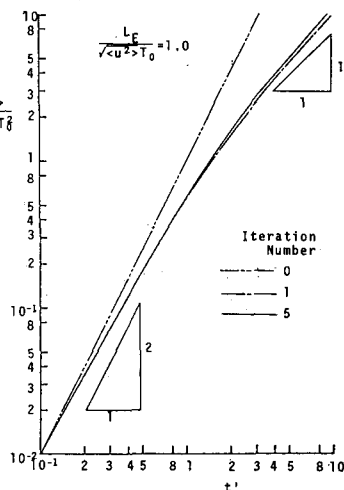


図-2(b)

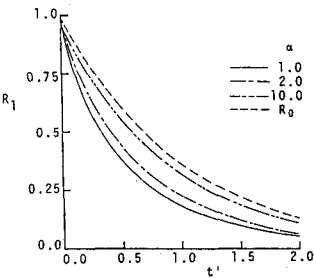


図-3

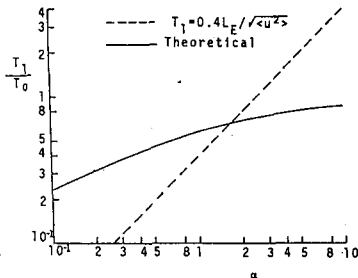


図-4

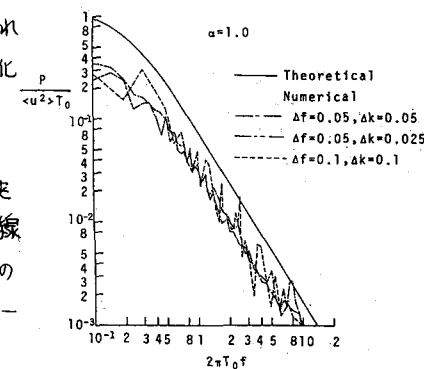


図-5

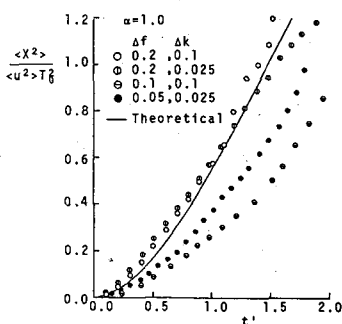


図-6