

[1] まえがき 乱流中における微細粒子の挙動は、ダムや沉殿池における濁水の清澄化過程等、工学上重要な問題である。本報では、乱れ強度が時間的に減衰する3次元一様等方性乱流中での微細粒子の運動特性を調べる為、粒子運動方程式の数値計算を行うと同時に、粒子運動方程式から導かれる速度相関方程式を用いて、3次元一様等方性乱流場の空間的な速度相関構造と重力沉降する微細粒子の挙動との関係について検討した。

[2] 一様等方性乱流場の空間的速度相関構造 乱れの場合のFourier級数表現にもとづいた Orszag and Pattersonによるスペクトル法を用いて3次元一様等方性乱流場の数値シミュレーションを行った<sup>1)</sup>。数値計算の条件は、一辺  $l=2.0\text{ cm}$  の周期的境界条件を満足する立方体であり、動粘性係数  $\nu=0.013\text{ cm}^2/\text{sec}$ 、初期乱れ強度  $U_0^2=0.4225\text{ cm}^2/\text{sec}^2$  である。距離ベクトル  $\mathbf{r}$  だけ離れた2点間の速度相関関数  $R_{ij}(t, \mathbf{r})$  は、一様等方性乱流場において、2つのスカラー関数 (i) 縦速度相関係数  $f(t, r)$ 、(ii) 横速度相関係数  $g(t, r) = f(t, r) + \frac{1}{2} r^2 \partial^2 f(t, r) / \partial r^2$  を用いて2次式で表わされる。

$$R_{ij}(t, \mathbf{r}) = v^2(t) \left( \frac{f(t, r) - g(t, r)}{r^2} r_i r_j + g(t, r) \delta_{ij} \right) \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 $v^2(t)$ : 乱れ強度、 $\delta_{ij}$ : フロネッカーのデルタ、 $r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ 、 $i, j = 1, 2, 3$  である。式(1)において、互方向(重力と反対方向)に距離ベクトル  $\mathbf{r}(0, 0, r)$  をとると

$$R_{11}(t, r) = R_{22}(t, r) = v^2(t) g(t, r) \quad , \quad R_{33}(t, r) = v^2(t) f(t, r) \quad \text{----- (2)}$$

図-1に、数値シミュレーションの結果得られる乱流場の  $v^2(t)$ 、 $g(t, r)$ 、 $f(t, r)$  を用いて式(2)により示される速度相関関数の時間的变化を示す。

[3] 粒子運動方程式の数値積分および粒子の拡散係数 乱流中における単一球形粒子の運動方程式として、粒子と流体の相対速度による抵抗の項にStokes抵抗を用い、Basset項を小さい<sup>2)</sup>と仮定し無視した次式を用いる。

$$d\mathbf{v}_p/dt + a\mathbf{v}_p = a\mathbf{v}_f + b d\mathbf{v}_f/dt + c\mathbf{g} \delta_{i3} \quad \text{----- (3)}$$

ここに、 $\rho_p$ : 粒子密度、 $\rho_f$ : 流体密度、 $\mathbf{v}_p$ : 粒子速度、 $\mathbf{v}_f$ : 流体速度、 $d$ : 粒径、 $\mathbf{g}$ : 重力加速度、さらに各係数は  $a=36\nu/(2\rho_p/\rho_f+1)d^2$ 、 $b=3/(2\rho_p/\rho_f+1)$ 、 $c=-(\rho_p/\rho_f-1)/(\rho_p/\rho_f+1/2)$  である。式(3)を数値積分する際の初期条件として、500個の粒子の初期位置  $\mathbf{x}(x, y, z)$  は各方向毎に区間  $[0, l]$  の一様乱数により与え、初速度  $\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, 0)$  を与えた。粒子の軌跡は式(3)を前進差分計算し得られる。その際に必要な粒子移動位置  $\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$  における流体速度  $\mathbf{v}_f(\mathbf{x}(\mathbf{x}, t), t)$  は、スペクトル法による数値シミュレーションされた流体速度の線形補間により求めた。数値計算に用いた粒子は、比重2.65、粒径  $150\text{ }\mu\text{m}$ 、 $200\text{ }\mu\text{m}$ 、 $250\text{ }\mu\text{m}$  である。図-2に式(3)の数値積分の結果得られる粒子の拡散係数  $D_p(t)$  を示す。まず、粒子の拡散係数はこの範囲の粒径については粒径の増加とともに減少する。これは、式(3)において、粒径  $d$  の増加により係数  $a(1/\text{sec})$  が減少し、 $a\mathbf{v}_p$ 、流体の乱れによる効果が小さくなる為である。次に同一粒径におい

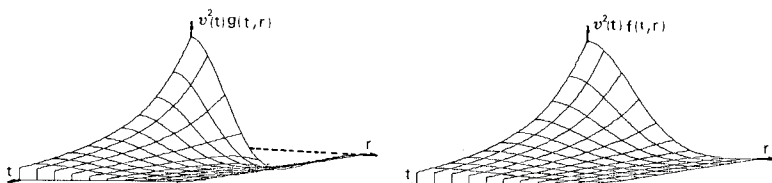


図-1 空間的速度相関関数の時間的变化

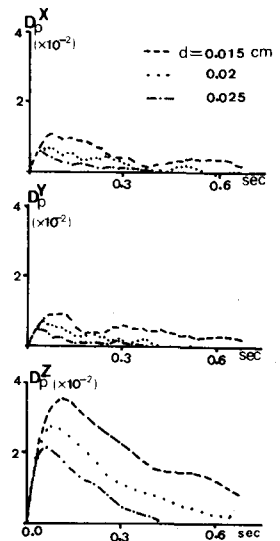


図-2 粒子の拡散係数

z方向の拡散係数は、x, y方向の拡散係数より大きな値をとる。即ち、一様等方性乱流場を重力沉降する微細粒子の拡散係数は、z方向に異方性をもつという数値計算結果が得られた。

[4] 微細粒子のLagrange速度相関 ここでは、上述で得られたz方向の拡散係数の異方性についての考察を行う。拡散係数 $D_p(t)$ は、粒子のLagrange速度相関関数 $R_{pp}(t, \tau)$ によって最終的に評価される。そこでまず、粒子速度変動 $u_{pi}(t)$ 、流体速度変動 $u_{fi}(t)$ により表わされる次の4つの相関関数をとる。

$$\begin{aligned} (A) \quad R_{ff(ii)}(t, \tau) &= \langle u_{fi}(t) u_{fi}(t+\tau) \rangle & (B) \quad R_{fp(ii)}(t, \tau) &= \langle u_{fi}(t) u_{pi}(t+\tau) \rangle \\ (C) \quad R_{pf(ii)}(t, \tau) &= \langle u_{pi}(t) u_{fi}(t+\tau) \rangle & (D) \quad R_{pp(ii)}(t, \tau) &= \langle u_{pi}(t) u_{pi}(t+\tau) \rangle \end{aligned} \quad \text{----- (4)}$$

ここに、 $\langle \rangle$ はensemble平均を示し、また式(4)では $i$ に関する規約は適用されない。式(4)の各々の相関関数は、変動速度に関する粒子運動方程式

$$d\mathbf{u}_p/d\tau + \mathbf{a} u_{pi} = \mathbf{a} u_{fi} + \mathbf{b} d\mathbf{u}_{fi}/d\tau \quad \text{----- (5)}$$

より導かれる速度相関方程式に表われる。即ち式(5)の $t=t+\tau$ の時に成立する式の両辺に $u_{fi}(t)$ を乗じensemble平均をとると

$$\partial R_{fp(ii)}/\partial \tau + \mathbf{a} R_{fp(ii)} = \mathbf{a} R_{ff(ii)} + \mathbf{b} \partial R_{ff(ii)}/\partial \tau \quad \text{----- (6)}$$

同様に $R_{pp(ii)}(t, \tau)$ については、

$$\partial R_{pp(ii)}/\partial \tau + \mathbf{a} R_{pp(ii)} = \mathbf{a} R_{pf(ii)} + \mathbf{b} \partial R_{pf(ii)}/\partial \tau \quad \text{----- (7)}$$

相関方程式(6)の右辺の(x, y, z)各方向の相関 $R_{ff(ii)}$ の構造にもとづいて、各方向の相関 $R_{fp(ii)}$ が評価される。次に $R_{fp(ii)}(t, \tau) = R_{fp(ii)}(t+\tau, -\tau)$ の関係をを用い式(7)より最終的に $R_{pp(ii)}$ の相関構造を得る。従って、 $R_{pp(ii)}$ は、式(6)の右辺の $R_{ff(ii)}$ の相関構造に強く依存する。

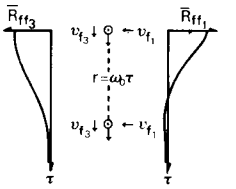


図-3 粒子の沈降過程

$R_{ff(ii)}(t, \tau)$ について  $R_{ff(ii)}$ は、時刻 $t$ で位置 $\mathbf{x}(\mathbf{a}; t)$ にいた粒子近傍の流体速度 $u_{fi}(\mathbf{x}(\mathbf{a}; t), t)$ と、 $\tau$ 時間後の粒子の沈降位置 $\mathbf{x}(\mathbf{a}; t+\tau)$ 近傍の流体速度 $u_{fi}(\mathbf{x}(\mathbf{a}; t), t)$ との自己相関である。この $R_{ff(ii)}$ は、粒子が終末沈降速度 $\omega$ 、z方向と並向きに沈降していると仮定すれば、図-3に示すように、時間にして $\tau$ 、距離にして $r = \omega \tau$ だけ離れた2点間の流体速度の相関 $\bar{R}_{ff(ii)}(t, \tau)$ によって近似できる。従って、 $\bar{R}_{ff(ii)}(t, \tau)$ は、図-1において任意のものを固定し、 $r = \omega \tau$ の曲線上での空間的速度相関式(2)により次のように表わされる。

$$\bar{R}_{ff(ii)}(t, \tau) = \bar{R}_{ff(ii)}(t, \tau) = v^2(t+\tau) g(t+\tau, \omega \tau) \quad \text{----- (8)}$$

$$\bar{R}_{ff(ii)}(t, \tau) = v^2(t+\tau) f(t+\tau, \omega \tau) \quad \text{----- (9)}$$

図-4に粒径 $200 \mu\text{m}$ の場合の式(8), (9)の $\bar{R}_{ff(ii)}$ と実際の数値計算による $R_{ff(ii)}$ 、式(4)の(A)との比較を示す。粒子の沈降は、実際、変動分を含むので $\bar{R}_{ff(ii)}$ と $R_{ff(ii)}$ との間に多少の差異が認められるが、x, y方向とz方向の相関構造のちがいは、式(8), (9)によって十分評価し得る。

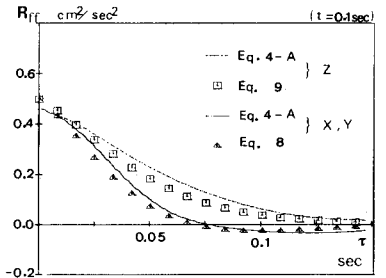


図-4 流体速度相関関数

$R_{pp(ii)}(t, \tau)$ について 図-5に、式(8), (9)の $\bar{R}_{ff(ii)}$ を相関方程式(6)に代入し、式(6), (7)の差分近似により得られる $\bar{R}_{pp(ii)}$ と実際の数値計算による $R_{pp(ii)}$ 、式(4)の(D)との比較を示す。x, y方向の $\bar{R}_{pp}$  (あるいは $R_{pp}$ )に横速度相関係数 $g(t, \tau)$ 、z方向の $\bar{R}_{pp}$  (あるいは $R_{pp}$ )に縦速度相関係数 $f(t, \tau)$ の相関構造による効果が表われている。

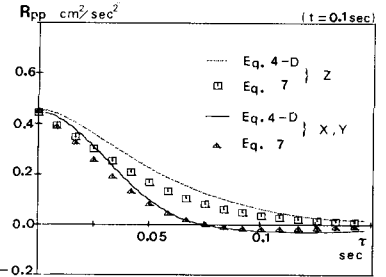


図-5 粒子のLagrange速度相関関数

[5] おわりに 本報で得られた結果を要約すると

- (i) 重力沉降する粒子近傍の流体速度に関する相関は、x, y方向とz方向では異なる相関構造をもつ。
- (ii) 速度相関方程式より得られる沈降性粒子のz方向のLagrange速度相関は、x, y方向の相関に比べ長い正の相関をもつ。
- (iii) 一様等方性乱流中における沈降性粒子のz方向の拡散係数は、x, y方向の拡散係数より大きな値をとる。

参考文献

1) 上田・神野・柳井・前浜：一様等方性乱流の数値計算，九大工学集報，第55巻，第1号，1982  
 2) 林・大橋：流体中に沈降する粒子の乱流特性について，水理講演集，1980