

1. はじめに 傾斜した固定境界上の下層密度流の流速分布と密度分布について、これまで多くの研究が行われてきた。しかし、下層密度流では界面の混合と固定境界の両方の影響を受けるため、流速分布と密度分布の特性は十分に明らかにされたとは言えず、抵抗特性についての理解も不十分である。本研究の目的は、下層密度流の極限の場合に相当する鉛直壁面密度噴流の層流解を理論的に導き、その特性を明らかにすることである。

2. 層流鉛直壁面密度噴流の理論 固定境界をもつ半無限領域に密度 ρ_0 の流体が静止しており、この周囲流体より大きな密度をもつ流体が、固定境界 ($y=0$) に沿って重力方向 (x 方向) に流下する場合を考える。流れは二次元、層流である。流れの x 方向の変化が緩やかであり、相対密度差 $\varepsilon = (\rho - \rho_0) / \rho_0$ が十分小さいと考える。このとき、 x 方向の Navier-Stokes の式は、Boussinesq 近似、境界層近似のもとで次のようにあらわされる。

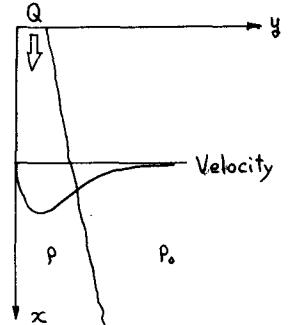


図1 座標系

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

ここで、 u, v : x, y 方向の流速、 g : 重力加速度、 ν : 動粘性係数である。相対密度差が塩分などの溶解性物質に起因する場合には、分子拡散による相対密度差が変化する。質量保存の関係は、相対密度差を用いて、

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \quad (2)$$

となる。ここで、 D : 分子拡散係数である。ここでは、流れが x 方向に十分に発達し、 y 方向には分子拡散による混合が進んだ領域を取扱う。まず、連続式(3)を満たす流関数 ψ を導入する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

この領域では、流速分布、密度分布がそれぞれ相似形になると仮定し、

$$\eta = a y x^{-m} \quad \psi = b x^n f(\eta) \quad \varepsilon = c x^k h(\eta) \quad (5)$$

とおく。式(5)の関係式(1), (2), (4)に代入して、 x についてのべきを等しくおくと、相似解の存在する条件として、 $n+m=1, k=n-3m$ の2式を得る。さらに、 m, n, k の値を確定するため、混合物質が溶解しており、相対密度差の流入フラックス Q が流下方向に一定であるという条件を加える。すなわち、

$$Q = \int_0^{\infty} \varepsilon u dy = bc x^{n+k} \int_0^{\infty} h f' d\eta = \text{const.} \quad (6)$$

この条件を加えると、 m, n, k は一義的に決定し、 $m=2/5, n=3/5, k=-3/5$ を得る。このとき、運動方程式(1)と質量保存式(2)は、次のようになる。

$$f''' + \frac{gc}{\nu a^3 b} h = \frac{b}{\nu a} \frac{1}{5} f'^2 - \frac{b}{\nu a} \frac{3}{5} f f'' \quad (7)$$

$$h'' = -\frac{b}{Da} \frac{3}{5} f' h - \frac{b}{Da} \frac{3}{5} f h' \quad (8)$$

式(5)の a, b, c は、式(7), (8)の係数が無次元になるように定めればよい。ここでは、無次元の密度差フラックス $Q_* (\equiv Q/\nu)$ の大きさによつて、流速分布、密度分布が変化しないように決定した。

$$a = \left\{ \frac{g Q_*}{\nu^2} \right\}^{\frac{1}{5}} \quad b = \nu a \quad c = \frac{Q_*}{a} \quad (9)$$

式(9)を式(7), (8)に代入して整理すると、

$$f'' + \frac{1}{5} f'^2 + \frac{3}{5} f f' + h = 0 \quad (10)$$

$$h'' + \frac{3}{5} S_c (f h + f' h') = 0 \quad (11)$$

となる。ここで S_c は動粘性係数と分子拡散係数の比 ν/D である。

境界条件は、壁面で流速が零、密度フラックスが零、無限遠で流速、密度差がともに零になるとして、

$$\eta = 0 \text{ で } f = f' = h = 0, \quad \eta = \infty \text{ で } f' = h = 0 \quad (12)$$

となる。流速、密度、せん断力は、次のような無次元形で求められる。

$$\eta = \left\{ \frac{Q_* g x^3}{\nu^2} \right\}^{\frac{1}{5}} \frac{y}{x} \quad f' = \frac{u}{(Q_*^2 g^2 \nu x)^{\frac{1}{5}}} \quad (13)$$

$$h = \frac{\varepsilon}{\left\{ \frac{\nu^2}{Q_* g x^3} \right\}^{\frac{1}{5}} Q_*} \quad f'' = \frac{\tau}{\rho_0 \left\{ \frac{g^3 \nu^4 Q_*^3}{x} \right\}^{\frac{1}{5}}}$$

3. 計算結果 式(10), (11)においては Q_* が未知なため、次のように計算を行った。式(13)で $Q_* = 1$ とし、新たな変数 η, h_1, f_1 を導入する。 f_1, h_1 に対する方程式は、式(10), (11)と同形である。式(12)の境界条件のもとで f_1, h_1 を求め、式(16)から Q_* の値を求める。式(13)から、 $\eta = \eta_1 Q_*^{\frac{1}{5}}, f' = f'_1 Q_*^{-\frac{2}{5}}, h = h_1 Q_*^{-4/5}$ の関係があるので、元の変数の値を知ることができる。式(10), (11)では、物質定数である S_c がパラメータとして含まれている。そこで計算では $S_c = 1 \sim 1000$ まで変化させた。(20°Cの水とNaClでは $S_c \approx 1000$ である) 図2, 3, 4は、それぞれ流速、密度、せん断応力分布の計算結果である。いずれの S_c に対しても、流速分布は壁面噴流に似た分布形となるが S_c が小さいほど広い範囲が流動する。密度分布は η が大きくなるにしたがって低減するが、この傾向は S_c が大きいほど顕著となる。せん断応力分布は、壁面で最大値をとり、 η とともに単調に減少し、負の極値をとった後、0に漸近する。この負の極値の値はいずれの S_c でも壁面での値に比べ、非常に小さいことがわかる。

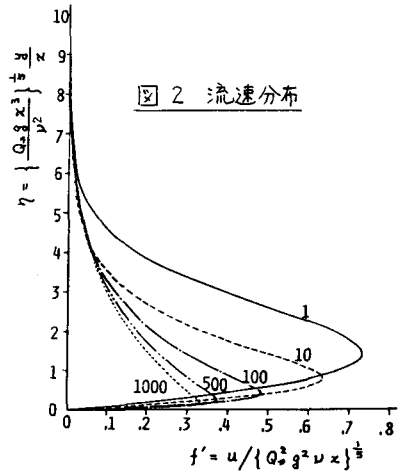


図2 流速分布

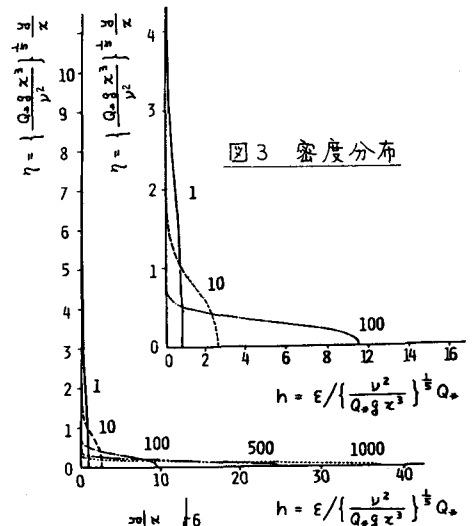


図3 密度分布

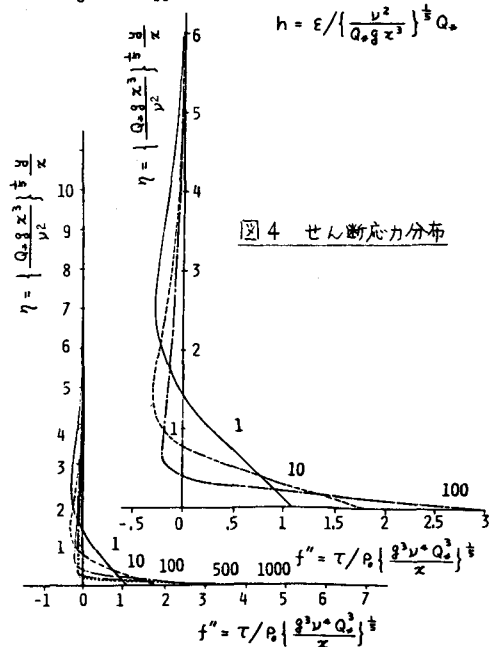


図4 せん断応力分布

1) Schlichting: Boundary Layer Theory, 6ed., pp. 300~302

2) 水理学会編: 成層密度流の界面現象(1), 工務会論文報告集, 242, 1975