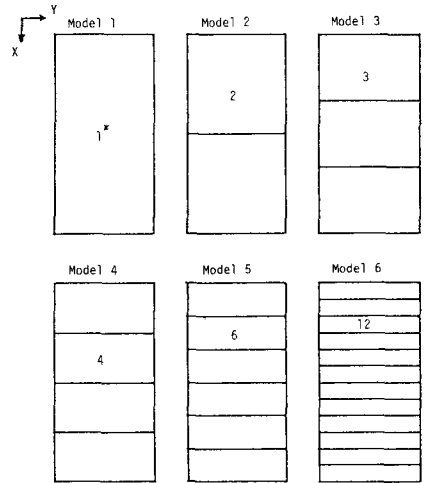


京都大学 学生員 寺 脇 正文  
 京都大学 正員 井 上 頼 輝  
 京都大学 正員 古 市 徹

1. はじめに. 不均質帯水層における拡散シミュレーションを精確に行うためには、流れ場を支配する帯水層パラメータである透水量係数(Transmissivity; 以下T)の空間的分布の推定が不可欠である。すでに筆者らはTを水位の観測データから推定する手法として、いわゆる逆問題として定式化することの必要性およびその有効性について研究してきた<sup>(1)</sup>。実際的に見地に立つと、対象領域をいくつの区画に分割してTを推定するかという問題は、観測の労力コストおよびT場の空間構造を知る上で重要である。そこで、本報では、ただ単にTを推定するだけでなく、同時に最適な最小次数のT場の分割数を決定できるように従来の手法を発展させた手法を考えた。これは赤池により導入されたAIC基準<sup>(2)</sup>を採用するものであり、仮想的な数値計算例によって本手法の有効性が示せたので報告する。

2. 解析手法について. AIC基準とは、Kullbackの情報量と尤度比検定の漸近理論に基づいた統計量であり、(1)式で定義される。AICはモデルの適切さを評価するための基準であり、AICの小さい方がモデルは適切であると判断される。すなわち、(1)式の右辺第一項の尤度が大きく、第二項のパラメータ次元数の小さいものが良いモデルである。AIC最小によって得られたモデルをMAICE (Minimum AIC Estimate) と呼ぶ。MAICEの考え方はエントロピー最大原理に基づくものであり、統計的検定における通常の経験的判断の本質的なものとよく一致する。AICを用いることにより、尤度比検定における主観的判断から解放され、モデルの適切さを客観的に判断することができる。解析の対象とした仮想帯水層は縦12m×横6m×深さ4mの被圧帯水層で、湧き出し・吸い込み・涵養はないものとし、水平二次元定常流れを考えた。地下水は上から下に流速50cm/dayで流れているものとする。この帯水層の支配方程式は(2)式で表わされる。(2)式はFEMによって離散化する。(3)式で表わされる合成された評価基準Jを最小にするTの最適解を求めるためにFletcher-Reevesの共役勾配法を用いる間接法によって、逆問題を解く。この時支配方程式は各繰り返し計算ごとに解かれる。水位の観測データとしては、理論的に(2)式を解いて得られた解に $\sigma_H^2 = 1.0 \times 10^{-6}$  (m<sup>2</sup>)の分散をもつ正規乱数を印加した模擬データが、格子配置の全FEM節点で得られているとした。Tはその対数 $Y = \log T$ によって提示され、一方向(x方)



\* Parameter dimension is represented by the number of estimated transmissivities.

Fig 1 Types of Models

方向(y方)にのみ変化するとして同定される。設定したモデルの族は6タイプで、Fig-1のように等面積分割であり、パラメータ次元数(Parameter Dimension; P.D.)—Tを推定しなければならない区画数、または、Tの推定値ベクトルの次元数—はそれぞれ1,2,3,4,6,12とし、設定した真のT場としては、Fig-2のように二つ

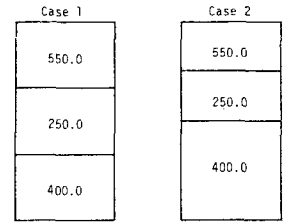


Fig 2 True transmissivity field (m<sup>2</sup>/day)

(1)  $AIC = -2 \log(\text{maximum likelihood}) + 2(\text{parameter dimension})$   
 (2)  $\frac{\partial}{\partial x}(T \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(T \frac{\partial h}{\partial y}) = 0$   
 (3)  $J = J_H + \lambda J_Y$   
 (4)  $J_H = (h^* - \hat{h})^T Y_H (h^* - \hat{h})$   
 (5)  $J_Y = (Y^* - \hat{Y})^T V_Y (Y^* - \hat{Y})$   
 (6)  $\lambda = \sigma_H^2 / \sigma_Y^2$   
 (7)  $AIC = N \times \log(2\pi J/N) + 2 \times L$

NOTATIONS

- T : transmissivity (m<sup>2</sup>/day)
- h : head (m)
- h\* : initial estimate of head (m)
- ĥ : estimated value of head (m)
- Y\* : initial estimate of Y
- Ŷ : estimated value of Y
- λ : Lagrange multiplier
- N : number of FEM nodes
- L : number of divided blocks

の場合を考えた。Case 1 は均等三分割, Case 2 は不均等三分割である。本手法のポイントであるAICの考え方を導入するために、水位の推定誤差を正規分布と仮定すれば、最尤推定法により、(3)式の合成した基準Jを近似的に各モデルの最大尤度とする。AICの計算は(7)式となる。

3. 計算結果 Case 1 の計算結果をTable-1に示す。またTの推定値をFig-3に示す。AICが最小なのはModel. 3でこれが最も適切なモデルと判断できる。実際、真のT場の設定値および分割パターンとよく一致していることがわかる。次に適切と判断されるモデルは、AICのあまり変わらないModel. 5, Model. 6で、これは領域分割パターンが両モデルとも真のT場と相似になっているからと考えられる。すなわちこれはFig-3の両モデルのTの推定値を検討すれば、Model. 5で二段ずつ、Model. 6では四段ずつの上・中・下段の区画ごとにTの推定値がほぼ等しい値となっていることからわかる。したがってパラメータ次元数が小さいModel. 3の方がより適切なモデルであるといえる。このことから遂に、もし始めにModel. 3をモデルの族に設定していなくても、各モデルのAICを計算してMAICEを求めた時点で、Tの推定値を検討することによりさらに適切なモデルを設定できることを示している。一方、Model. 1, 2, 4は、AICから不適切と判断され、Tの推定値も真のT場とは全く異なったものとなっている。Case 2の計算結果はTable-2に示しており、最も適切なモデルはMAICEから、Model. 4と判断される。このモデルでのTの推定値をFig-4に示す。Fig-4をみれば、下半分の二段の区画のTの推定値がほぼ同じであるから、これらをひとつの区画とするFig-5のようなModel 7のように分割パターンを決めて同定してみると、AICがさらに小さくなり、より適切なモデルであることが示される、このようにすると均等分割によって不均等分割パターン→不均等なTの空間構造→をも同定

Model	Parameter Dimension(P.O.)	J $\times 10^5$	AIC
Model 1	1	112.7	- 859
Model 2	2	74.14	- 895
Model 3	3	0.1267	-1474
Model 4	4	8.418	-1089
Model 5	6	0.1639	-1443
Model 6	12	0.3025	-1376

Model	Parameter Dimension(P.O.)	J $\times 10^5$	AIC
Model 1	1	48.26	- 936
Model 2	2	48.26	- 934
Model 3	3	18.59	-1019
Model 4	4	0.1372	-1464
Model 5	6	2.575	-1193
Model 6	12	0.2992	-1377
Model 7	3	0.1323	-1469

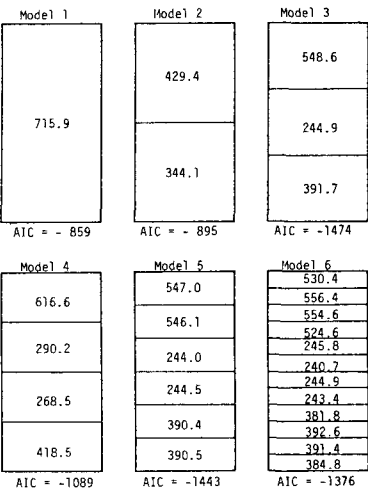


Fig 3 Estimated values of transmissivity Case 1 (m<sup>2</sup>/day)

4. 考察

Table 1, 2で、AICとJとは大きさの順が一致している。JはFletcher-Reeves法を用い繰り返し計算によって逆問題を解く時の最適解を求めるための評価基準であり、(4)式で表わされるモデル適合化基準J<sub>H</sub>と、(5)式のパラメータの合理性を保ち平滑化の効果を与えるJ<sub>T</sub>とのトレードオフを決定する。一方、AICを導入することの意味は、最大尤度すなわちJが同程度としても、できるだけ少ないパラメータで表示されるモデルが良いというケチの原理(principle of parsimony)に従ってモデルの適切さを判断するためであり、AICはT場の分割パターン(パラメータ次元)を決定するための評価基準となる。したがって常にそれらの大きさの順が一致するわけではない。本手法による最適なモデル—Case 1のModel. 3, Case 2のModel. 7—はそれぞ

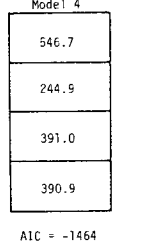


Fig 4 Estimated transmissivity field Case 2 Model 4 (m<sup>2</sup>/day)

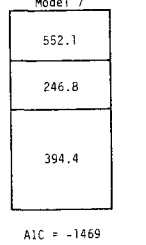


Fig 5 Estimated transmissivity field Case 2 Model 7 (m<sup>2</sup>/day)

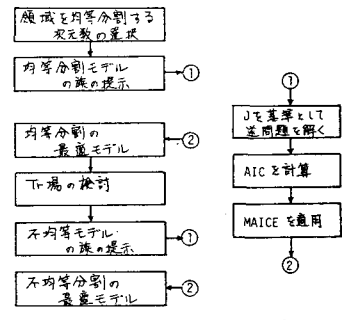


Fig 6 最適モデルを導く3手順

れぞれの場合のT場の空間構造をよく反映していることがわかる。以上のことから、Fig-6のアルゴリズムによりT場の空間構造(分割パターン)を決定できる。最後に今後の課題としては真のT場の空間構造がX方向とY方向の二次元的に変化する場合へ発展させるつもりである。

【参考文献】  
 (1) 古市・井上・寺嶋; 水18回衛生工学研究  
 討論会講演論文集 pp.141-151(1981)  
 (2) 赤池; 情報量基準AICとは何か、  
 数理科学 No.153 pp.5-11(1976)