

京都大学大学院 学生員 〇米田 稔

京都大学工学部 正員 井上 頼輝

京都大学工学部 正員 古市 徹

1. はじめに. 最近, 地下水汚染解析シミュレーションに際しては, 帯水層を不均質かつ不確定なものとしてとらえ, 確率論的に解析し, これらが流れ場の予測に及ぼす影響を評価する研究の流れがある. 本研究はモンテカルロ法を用いる Smith & Freeze⁽¹⁾ の研究を踏まえて, 特に透水量係数の確率場の構成方法に改良を加えるとともに, シミュレーションに観測データを条件付けすることが出来る Conditional Simulation (CS)⁽²⁾ の手法を地下水流れ場予測へ適用した結果について考察したものである.

2. 確率場の構成方法について. 透水量係数 T が対数正規分布するとし ($Y = \log_{10} T$ と変換して考える), また空間的にエルゴード性を仮定する. 解析対象の空間構造として Y の共分散関数を仮定し, 領域内の n 地点について $n \times n$ の共分散行列 $[C]$ を作製する. $[C]$ は一般に非負定値実対称行列となることが証明できるので, $[C] = [P]^T [P]$ と分解できる. ここに $[P]$ は n 次元実行列 $[P]$ の転置行列である. $[P]$ として下三角行列をとると, $C_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \rho_{ik} \rho_{jk}$ の関係から逐次 $[P]$ の要素が求まる. したがって期待値 0, 分散 1 の n 次元正規性白色雑音ベクトルを $\{E\}$ とすると, $\{Y\} = [P]\{E\}$ とすることにより, 期待値 0, 共分散 $[C]$ の有色雑音を発生できることになる. n 地点での Y の期待値を $\{Y\}$ とすると, $\{Y\} = \{Y\} + \{Y\}$ は, 期待値 $\{Y\}$, 相関構造 $[C]$ の正規乱数となる. また逆変換 $T = 10^Y$ より T を求めることができる. この方法は Smith & Freeze の方法と次のような関係にある. Smith & Freeze では, 位置座標 (x_i, y_i) の Y を Y_{ij} として, 確率モデル①式を仮定し, n 個の線形方程式②式を得る. ここに $\{Y\}, \{E\}$ は, Y_{ij}, E_{ij} を 1 列に並べた n 次元ベクトルであり, $[W]$ は $n \times n$ の係数行列である. ②式より③式と変形でき, $([I] - [W])$ が正則なら④式のよう書ける. $[P] = \beta([I] - [W])^{-1}$ とすると, $\{Y\}$ は期待値 0, 共分散行列 $[P]^T [P]$ の正規乱数となる (但し, 最初から共分散関数を指定できない). $[P]$ は正則だから三角行列 $[R]$ と直交行列 $[T]$ の積に分解できることが知られているので, $\{Y\} = [R][T]\{E\}$ と表現できる. このとき簡単な計算から $[T]\{E\}$ は, やはり期待値 0, 分散 1 の正規性白色雑音となる. すなわち初めから $\{Y\} = [P]\{E\}$ と変形しておけば, 本研究の方法と形式上同じ形になる. しかし本研究の方法では, 任意の共分散関数をもつような乱数を発生させることができるため, より一般的で有効な方法と考えられる.

3. 解析方法. まず 2. の乱数発生法により T の確率場 (T 場) を多数発生させる. それぞれの T 場について基礎式⑤を解いて, 水位 h , 流速 $q = (q_x, q_y)$ を求め, これら多数の h, q の組より, その平均値, 標準偏差, 相関係数などの統計的性質を求める. 本研究では Y の統計的構造として, 強定常, エルゴード性, および等方差性を仮定し, 相関関数として指数形を仮定するものとする. Y の標準偏差 σ_Y と, 空間積分スケール λ を指標として, h と q に及ぼす影響を解析した. ここで $\lambda = \int_0^\infty f(r) dr$, $f(r)$ は距離 r 離れた地点間の相関係数である. 解析は Fig. 1 に示す長方形領域について行い, 400 の等しい三角形メッシュに分割し, 各節点に発生させた乱数 T を割り当て, $T = \sum T_i N_i$, $h = \sum h_i N_i$, $q_x = \sum q_{xi} N_i$, $q_y = \sum q_{yi} N_i$ として有限要素法を適用する. ここに T_i, h_i, q_{xi}, q_{yi} は各節点値, N_i はピラミッド型形状関数である. また Fig. 1 に境界条件を示している. T 場の run の数は 300 とした.

4. CS による解析. T の観測値が m 個与えられた時, 観測誤差がないと仮定すると, CS による T 場は⑥式

- (1) $Y_{i,j} = a_x(Y_{i,j-1} + Y_{i,j+1}) + a_y(Y_{i,j-1} + Y_{i,j+1}) + B E_{i,j}$ で与えられる. ここに $\hat{Y}(x, y)$ は, m 個の観測値より求めた KRIGING 推定値, $S(x, y)$ は $Y(x, y)$ と同じ統計的構造を持つ乱数であり, $\hat{S}(x, y)$ は m 個の観測地点に対応する $S(x, y)$ の値を観測値として求めた KRIGING 推定値である. このように観測データにより条件付けて発生した T 場について 3. と同様の解析を行った.
- (2) $\{Y\} = [W]\{Y\} + B\{E\}$ (3) $([I] - [W])\{Y\} = B\{E\}$
- (4) $\{Y\} = B([I] - [W])^{-1}\{E\}$
- (5) $a/\partial x(T_x \partial h/\partial x) + a/\partial y(T_y \partial h/\partial y) = 0$,
 $q_x = -T_x \partial h/\partial x$, $q_y = -T_y \partial h/\partial y$
- (6) $Y(x, y) = \hat{Y}(x, y) + \{S(x, y) - \hat{S}(x, y)\}$

5. 結果と考察. Y の期待値 $\bar{Y}$ を 1.2, 標準偏差を 0.2, l を 50m としたときの Y 場, h 場, q 場の 1 例をそれぞれ Fig. 2, 3, 4 に示す. Fig. 4 では流速の差, $q_x - q_y$ (q_x は $Y=1.2=const$ とした時の q_x の値) を示している.

(i) σ_Y の影響: h と q_y の平均値は $Y=1.2=const$ とした時とはほぼ同じ. q_x の平均値 $\bar{q}_x$ と, h , q_x , q_y の標準偏差 σ_h , σ_{q_x} , σ_{q_y} は, それぞれ σ_Y の増加とともに増加した. $\bar{q}_x$, σ_h , σ_{q_x} の例をそれぞれ Fig. 5, 6, 7 に示す. Fig. 5, 6, 7 は領域の中央の 1 点について求めたものであるが, 全領域では同一傾向を示す. h 及び σ_h と σ_{q_x} については境界条件の影響で位置によってその値は大きく異なる. q_x の例を Fig. 8 に示す. (ii) l の影響: 300 個の平均値では, Y の平均値と標準偏差にもまだかなり差があり, l だけの影響によるは, もりい傾向を断定することはできなかった. しかし σ_h , σ_{q_x} , σ_{q_y} になんらかの影響を持つことは確実と思われる. また l が大きくなるほど全ての変数についてその相関係数は大きくなった. (iii) CS について: 10 点の仮想データを与えて CS を行った例を Fig. 9, 10, 11 に示す. Fig. 9 は Y の KRIGING 推定値であり, 黒点で Y の観測地点を示す. Fig. 10 は CS により得られた Y 場の 1 例であり, Fig. 11 は Y の KRIGING 標準偏差を示している. Fig. 12, 13 にそれぞれ h , σ_h を示す. Fig. 8 に比べて標準偏差が減少しているのは, 観測データという追加情報により場の不確実性が減少したためと考えられる.

今後の課題として, 積分スケールと領域の大きさとの関係など, さらに詳しい統計的解析が必要である. また帯水層の不均質性と不確実性が, 地下水中の物質移動に及ぼす影響については, 講演時に述べるつもりである.

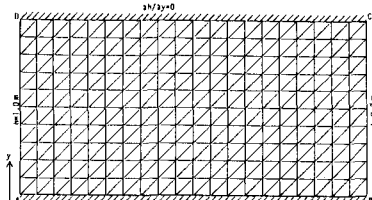


Fig. 1 Flow domain and boundary conditions

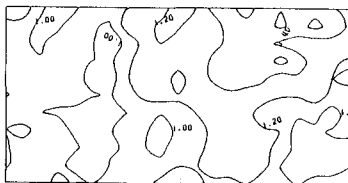


Fig. 2 A sample of Y field

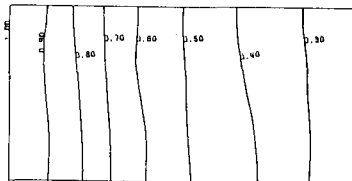


Fig. 3 A sample of h field

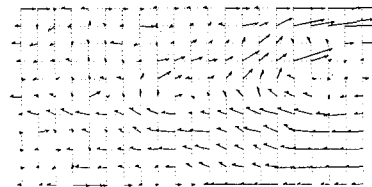


Fig. 4 A sample of q field

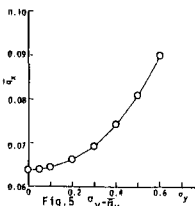


Fig. 5

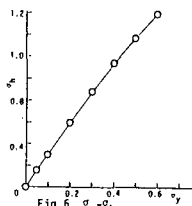


Fig. 6

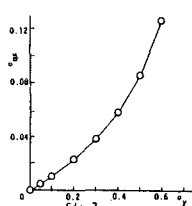


Fig. 7

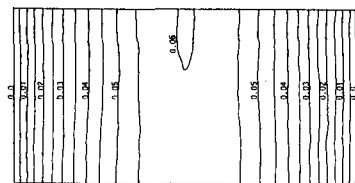


Fig. 8 σ_h distribution

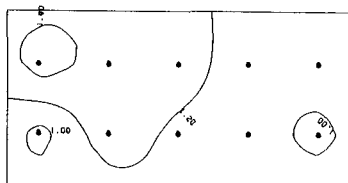


Fig. 9 Kriging estimate of Y field

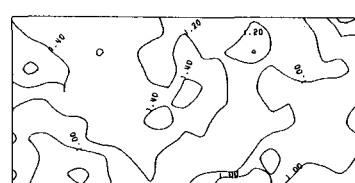


Fig. 10 A sample of Y field (conditioned)

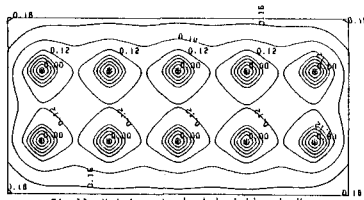


Fig. 11 Kriging standard deviation in Y

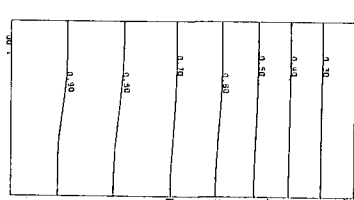


Fig. 12 h distribution (conditioned)

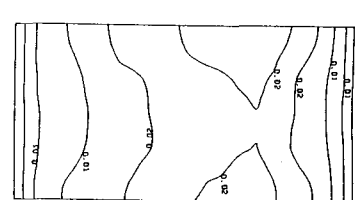


Fig. 13 σ_h distribution (conditioned)

- References (1) Smith, L., and R. A. Freeze, Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 2, Two-dimensional simulations, Water Resour. Res., 15(6), 1543-1559, 1979
(2) Delhomme, J. P., Spatial variability and uncertainty in groundwater flow patterns, Water Resour. Res., 15(2), 269-280, 1979