

パシフィックコンサルタンツ(株) ○正員 野口 均
信州大学工学部 正員 富所 五郎

1. まえがき 水深の大きい湖は、夏から秋にかけてははっきりした成層状態を形成するようになるが、この時上下の水塊の混合は起りにくくなり、非成層状態の時期と比べて異なった流動特性を示す。成層状態の流れの三次元数値解析モデルとしては、従来の①三次元メッシュを組み合わせたモデル、②多層モデルなどが挙げられる。これに対し著者は、連続成層状態に対し流れや密度は鉛直方向に連続であるとおき三角関数で展開して解くモデルを提案したが、このモデルは不連続成層(躍層が存在する)に対しては不適当である。そこで本研究は、このモデルと二層モデルを組み合わせた不連続成層状態にある閉鎖水域の風成流に対する有限要素法による三次元数値解析モデルを提案するものである。このモデルでは、従来のように各層内での流速を鉛直方向に一定とするのではなく連続分布するとしており、閉鎖水域の風成流でよく起る同一層内での流速分布をも表現できる利点がある。

2. 基礎式とそれらの有限要素法による定式化 上・下層の各々で水温が一一定で、層間で水塊の混合がなしいとした時の風成流の基礎式は、水圧が静水圧分布に従い

$$\text{上層;} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) + f_i, \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{下層;} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial z}{\partial x_i} - g(\varepsilon - 1) \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (A'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) + f_i, \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{境界条件;} \text{水面 } z = \zeta \text{ で } T_i = A_3 \frac{\partial u_i}{\partial z}, \text{ 水底 } z = -h \text{ で } u_j = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{内部面 } z = -d \text{ で } T_i = f \cdot \left[\frac{(u_i - u'_i) |u - u'|}{2} \right]_{z=d}$$

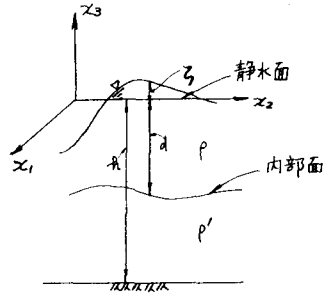


図-1 記号の説明

となる。ここに縮約規約を用い $i=1, 2, j=1, 2, 3$, u_j, u'_j は流速成分で x_1, x_2, x_3 の関数, A_{ij}, A'_{ij} は渦粘性係数, f_i はコリオリ項 $2\omega \times u$ を東, 北を正にとると $f_1 = u_2, f_2 = -u_1$, T はせん断応力を密度で除したもので、 f は内部面の抵抗係数である(図-1参照)。ここで内部面のせん断応力の評価において、一般にはそれぞれ上・下層の平均流速を用いている。しかし湖などの閉鎖水域を対象とした場合、各層内での順流と逆流が同程度となることが多く平均流速が上・下層とも零となりせん断応力が働かないことになる。この矛盾を除くため内部面の上・下面の流速の差を認め、これを用いて上のようにせん断応力を評価している。つぎに近似関数として、水平方向の従来の正余弦関数(NR)と鉛直方向の余弦関数($\cos B_p(z-\zeta), \cos A_g(z+d)$)の積である形状関数を用い流速を近似している。つまり

$$\text{上層;} u_i = NR \cdot \cos B_p(z-\zeta) \cdot u_{i,pk}, \quad \zeta = NR \cdot \zeta_k,$$

$$B_p = \frac{p-1}{d} \pi, \quad p=1, 2, \dots, m,$$

$$\text{下層;} u'_i = NR \cdot \cos A_g(z+d) \cdot u'_{i,pk}, \quad d = NR \cdot d_k$$

$$A_g = \frac{2g-1}{2(h-d)} \pi, \quad g=1, 2, \dots, m,$$

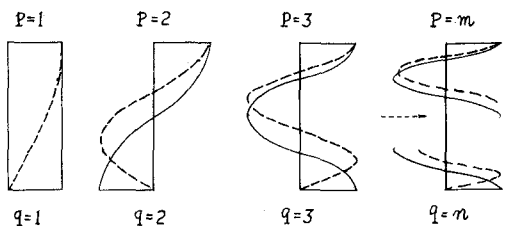


図-2 鉛直方向の形状関数

(図-2参照), ここに m, m は流速展開項数, k は (実線 $\cos B_p(z-\zeta)$, 点線 $\cos A_g(z+d)$)

本研究では三角形一次要素のものを用いるので、三角形の頂点である。つきに①式には $NK \cdot \cos B_p(z-z)$ 、②式には $NK \cdot \cos A_g(z-d)$ 、さらに③、④式をそれぞれ $-d \sim z$ 、 $-h \sim -d$ の区間で z 方向に積分し u_3 、 u_4 を消去した式には NK を重み関数としてかけ各要素内で積分すると、有限要素法により定式化した式が得られる。しかしここでは数値の都合上省略する。さらに数値計算例では非定常計算を行なっているが、時間積分法としては two-step Lax-Wendroff 法を用いている。

3. 数値計算例と考察 本研究の方法の妥当性を検討するため、計算例として解析解の得られる条件の単純な問題をとり挙げる。対象とする解析例は幅 100m 、長さ $L=2000\text{m}$ 、水深 $h=5.0\text{m}$ 、内部面 $d=2.5\text{m}$ で静止状態にある開水路に突然 3.0m/s の長さ方向の風が連続して吹く場合である。ここで節点を全2件にとり、その流速の境界条件をスリッパとする流れは水平、鉛直の二次元流れとなり、上、下層の密度比を $\rho=0.9$ とすると基礎式が簡単にたいて解析解を得ることができ。節点数42、要素数40、時間きざし $\Delta t=5\text{sec}$ 、 $A_3=A_4=2.83\text{cm}^2/\text{sec}$ 、風による $T=0.13\text{cm}^2/\text{sec}$ 、水平渦動粘性係数と慣性項を零と置いた結果を図-3、4に示す。ここで図-3の定常解は、長さ方向に x_1 軸をとる上での条件を入れた①式 $-g \cdot \partial z / \partial x_1 + \partial(A_3 \cdot \partial u_1 / \partial x_3) / \partial x_3$ と③式 $-g(z-d) \cdot \partial d / \partial x_1 + \partial(A_4 \cdot \partial u_1 / \partial x_4) / \partial x_4 = 0$ および連続式 $\int_{-h}^0 u_1 \cdot dz = 0$ 、 $\int_h^0 u_1 \cdot dz = 0$ に⑤式を用いて解析的に解いた解であり、また図-5の定常解も同様にして得た。さらにこの解析例のセイシエの周期は、各層で流速を鉛直方向に一変とすると④式は $\partial u_1 / \partial t + g \cdot \partial z / \partial x_1 = 0$ 、 $\partial(z+d) / \partial t + d \cdot \partial u_1 / \partial x_1 = 0$ 、 $\partial u_2 / \partial t + g(z-d) \cdot \partial d / \partial x_1 + g(z-1) \cdot \partial d / \partial x_1 = 0$ 、 $-2d \cdot \partial t + (h-d) \cdot \partial u_1 / \partial x_1 = 0$ となり、これより長波の速度 $C = \sqrt{gh} \cdot ((1 \pm (1-4(h-d)d(1-z)/h^2)^{1/2})^{1/2})$ で、 $\omega = 2\pi / C$ とし $2\pi / C = 579\text{sec}$ 、 3570sec となる。図-3より流れは時間とともに発達し8000secでは一部を除き、ほぼ定常解(解析解)に近い値を示している。なお水面付近の差は $m=4$ としたためで、 m をもっと大きくすることにより小さくなる。また $f=0.01$ の場合も計算したが、内部面上下に大きな流速差がで、下層にはほとんど流れの無い結果が得られた。また図-4で、水面と内部面は定常解を中心にして振動しており、その周期は上の解析解で示したオーモードの周期に近い値を示している。以上より本研究のモデルはほぼ妥当なものと思える。今後は、 f の値、斜面の取扱いなどを検討し、実在の湖などへの適用を計りたい。

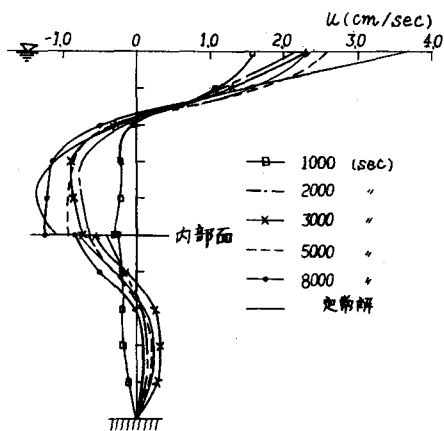


図-3 流速分布 ($f=1.0$)

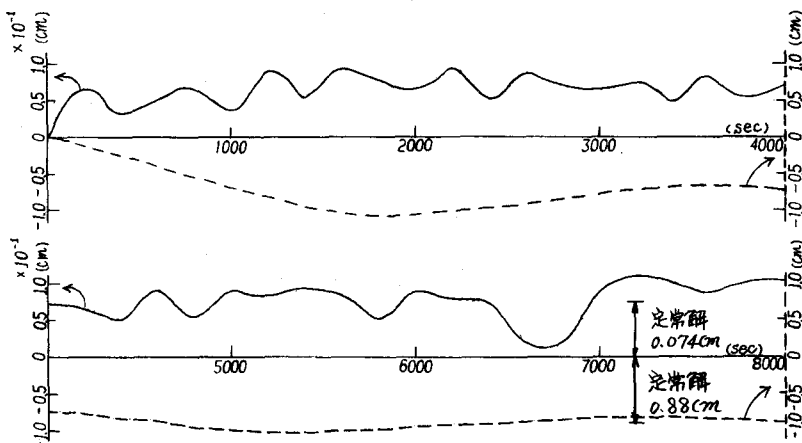


図-4 風下側の岸の水面(実線)と内部面(点線)の変化 ($f=1.0$)

参考文献 1) 富田, 流れの有限要素法解析シミュレーション, 日科技連, 1982. 2) 野口, 信州大学修士論文, 1982.