

中央大学 学生員 O入江 康郎
中央大学 正 員 川原 睦人

1. 緒言 これまで、河川や海洋における流砂の諸現象を数値的に解析する場合、一般には底質は固定されているものと考え、木の流動のみが取扱われてきた。ここでは、平均流を用いた底質の移動問題を目的とした、空間方向に有限要素法、時間方向には逐次時間積分法を用いた解析法を提案する。

2. 基礎方程式と有限要素法 図1の座標系における通常の浅水長波方程式において、流速を次のように仮定する¹⁾。

$$U_i = U_0 + \frac{\gamma}{h} U_{0i} + U_{1i}, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta_1 \quad (1)$$

ここに、添字0は底面を固定したときの収束解であり、添字1は底質の移動によるものである。そこで、(1)式の関係を用いると、基礎方程式は総和規約を用いて以下のように表わすことができる。

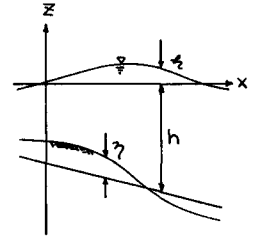


図1 座標系

$$\begin{aligned} & U_{1i} + \frac{\gamma}{h} U_{0i} + U_{0j} U_{1i,j} + U_{1j} U_{0i,j} + U_{1j} U_{1i,j} + U_{0j} \left(\frac{\gamma}{h} U_{0i} \right)_{,j} + \frac{\gamma}{h} U_{0j} U_{0i,j} \\ & + \frac{\gamma}{h} U_{0j} U_{1i,j} + U_{1j} \left(\frac{\gamma}{h} U_{0i} \right)_{,j} + \frac{\gamma}{h} U_{0j} \left(\frac{\gamma}{h} U_{0i} \right)_{,j} + g \zeta_{1,i} + \frac{\tau_{0i}}{\rho D} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\zeta_{1,i} - \gamma + \{ (h + \zeta_0) U_{1i} \}_{,i} + \{ (\zeta_1 - \gamma) U_{0i} \}_{,i} + \{ (\zeta_1 - \gamma) U_{1i} \}_{,i} + \{ (h + \zeta_0) \frac{\gamma}{h} U_{0i} \}_{,i} + \{ (\zeta_1 - \gamma) \frac{\gamma}{h} U_{0i} \}_{,i} = 0 \quad (3)$$

また、底質の連続方程式も同様に

$$\dot{\gamma} + \frac{1}{1-\lambda} \nabla \cdot \left(\frac{U_i}{W} \gamma_i \right) + \frac{1}{1-\lambda} \left[T_{iu} \{ (U_0 + U_1)_{,i} + \gamma \left(\frac{U_0}{h} \right)_{,i} \} + T_{iw} \{ (V_0 + V_1)_{,i} + \gamma \left(\frac{V_0}{h} \right)_{,i} \} \right] = 0 \quad (4)$$

ここに、 $W^2 = U^2 + V^2$, $D = \zeta_0 + \zeta_1 + h - \gamma$, $\nabla = \frac{1}{h} (U_0 \frac{\partial}{\partial x} + V_0 \frac{\partial}{\partial y})$, $T_{xu} = \frac{U}{W} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{V^2}{W^3} T$

$$T_{xv} = \frac{U}{W} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{UV}{W^3} T, \quad T_{yu} = \frac{V}{W} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{UV}{W^3} T, \quad T_{yv} = \frac{V}{W} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{U^2}{W^3} T$$

以上の基礎方程式において、 U は流速、 h は平均水深、 ζ は水位上昇、 γ は底面上昇、 λ は底質の空隙率、 T は流動量である。尚、流動量公式としてはメイヤー・ピーターの式を用いることとする。

有限要素法を適用するにあたり、基礎方程式にそれぞれ、重み付き残差法を用いて離散化し、解析領域を任意の大きさの三角形要素に分割したものに對して、一次の内挿関数を用いることにすれば、次のような有限要素方程式を得る。

$$\begin{aligned} & M_{000} U_{10i} + L_{000} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0 U_{0i} + K_{1000j} U_{00j} U_{10i} + K_{1000j} U_{10j} U_{00i} + K_{1000j} U_{10j} U_{10i} + K_{2000\delta i} U_{00j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0 U_{0\delta i} \\ & + K_{2000\delta i} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0 U_{00j} U_{0\delta i} + K_{2000\delta j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0 U_{00j} U_{1\delta i} + K_{2000\delta j} U_{10j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0 U_{0\delta i} + K_{2000\delta j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0 U_{10j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_\delta U_{0\delta i} \\ & + H_{00i} \zeta_{10} + B_{00i} \left(\frac{\tau_{0i}}{D} \right)_0 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & M_{000} (\zeta_{10} - \gamma_0) + C_{1000i} (h_0 + \zeta_{00}) U_{10i} + C_{1000i} (\zeta_{10} - \gamma_0) U_{10i} + C_{1000i} (\zeta_{10} - \gamma_0) U_{00i} + C_{2000\delta i} (h_0 + \zeta_{00}) \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0 U_{0\delta i} \\ & + C_{2000\delta i} (\zeta_{10} - \gamma_0) \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0 U_{0\delta i} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$M_{000} \dot{\gamma}_0 + F_{000i} \nabla \cdot \left(\frac{U_i}{W} \right)_0 \gamma_0 + N_{000i} T_{iu} (U_{00} + U_{10}) + Z_{000i} T_{iu} \gamma_0 \left(\frac{U_0}{h} \right)_0 + N_{000i} T_{iu} (V_{00} + V_{10}) + Z_{000i} T_{iv} \gamma_0 \left(\frac{V_0}{h} \right)_0 = 0 \quad (7)$$

3. 時間方向への離散化 時間方向へは二段階ウツクス・ウェンドロフ法を用いて離散化する。

$$\begin{aligned} & \langle \text{第1段階} \rangle \quad \bar{M}_{000} U_{10i}^{n+1/2} = \bar{M}_{000} U_{10i}^n - \frac{\Delta t}{2} \left[K_{1000j} U_{00j} U_{10i}^n + K_{1000j} U_{10j} U_{00i}^n + K_{1000j} U_{10j} U_{10i}^n + K_{2000\delta i} U_{00j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^n U_{0\delta i}^n \right. \\ & + K_{2000\delta i} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^n U_{00j} U_{0\delta i}^n + K_{2000\delta j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^n U_{00j} U_{1\delta i}^n + K_{2000\delta j} U_{10j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^n U_{0\delta i}^n + K_{2000\delta j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^n U_{10j} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_\delta^0 U_{0\delta i}^n + H_{00i} \zeta_{10}^n \\ & + B_{00i} \left(\frac{\tau_{0i}}{D} \right)_0^n \left. \right] + L_{000} \left\{ \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^n - \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^{n+1/2} \right\} U_{00i} \\ & \bar{M}_{000} (\zeta_{10}^{n+1/2} - \gamma_0^{n+1/2}) = \bar{M}_{000} (\zeta_{10}^n - \gamma_0^n) - \frac{\Delta t}{2} \left[C_{1000i} (h_0 + \zeta_{00}) U_{10i}^n + C_{1000i} (\zeta_{10}^n - \gamma_0^n) U_{10i}^n + C_{1000i} (\zeta_{10}^n - \gamma_0^n) U_{00i}^n \right. \\ & + C_{2000\delta i} (h_0 + \zeta_{00}) \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^n U_{0\delta i}^n + C_{2000\delta i} (\zeta_{10}^n - \gamma_0^n) \left(\frac{\gamma}{h} \right)_0^n U_{0\delta i}^n \left. \right] \\ & \bar{M}_{000} \dot{\gamma}_0^{n+1/2} = \bar{M}_{000} \dot{\gamma}_0^n - \frac{\Delta t}{2} \left[F_{000i} \nabla \cdot \left(\frac{U_i}{W} \right)_0^n \gamma_0^n + N_{000i} T_{iu} (U_{00} + U_{10})^n + Z_{000i} T_{iu} \gamma_0^n \left(\frac{U_0}{h} \right)_0^n + N_{000i} T_{iu} (V_{00} + V_{10})^n \right. \\ & + Z_{000i} T_{iv} \gamma_0^n \left(\frac{V_0}{h} \right)_0^n \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \text{第2段階} \rangle \quad \bar{M}_{\text{des}}^{n+1} U_{\text{des}}^n &= \bar{M}_{\text{des}}^n U_{\text{des}}^n - \Delta t \left[K_{1\text{des}} \delta_{ij} U_{\text{des}}^n U_{\text{des}}^n + K_{1\text{des}} \delta_{ij} U_{\text{des}}^n U_{\text{des}}^n + K_{1\text{des}} \delta_{ij} U_{\text{des}}^n U_{\text{des}}^n + K_{2\text{des}} \delta_{ij} U_{\text{des}}^n \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} U_{\text{des}}^n \right. \\
&+ K_{2\text{des}} \delta_{ij} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} U_{\text{des}}^n U_{\text{des}}^n + K_{2\text{des}} \delta_{ij} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} U_{\text{des}}^n U_{\text{des}}^n + K_{2\text{des}} \delta_{ij} U_{\text{des}}^n \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} U_{\text{des}}^n + K_{3\text{des}} \delta_{ij} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} U_{\text{des}}^n U_{\text{des}}^n + H_{\text{des}} \delta_{ij} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} \\
&+ B_{\text{des}} \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} \left. \right] + L_{\text{des}} \left\{ \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} - \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} \right\} U_{\text{des}}^n \\
\bar{M}_{\text{des}} (\xi_{\text{des}}^{n+1} - \gamma_{\text{des}}^n) &= \bar{M}_{\text{des}} (\xi_{\text{des}}^n - \gamma_{\text{des}}^n) - \Delta t \left[C_{1\text{des}} \delta_{ij} (h_{\text{des}} + \xi_{\text{des}}^n) U_{\text{des}}^n + C_{1\text{des}} \delta_{ij} (\xi_{\text{des}}^{n+1} - \gamma_{\text{des}}^n) U_{\text{des}}^n + C_{1\text{des}} \delta_{ij} (\xi_{\text{des}}^n - \gamma_{\text{des}}^n) U_{\text{des}}^n \right. \\
&+ C_{2\text{des}} \delta_{ij} (h_{\text{des}} + \xi_{\text{des}}^n) \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} U_{\text{des}}^n + C_{2\text{des}} \delta_{ij} (\xi_{\text{des}}^{n+1} - \gamma_{\text{des}}^n) \left(\frac{\gamma}{h} \right)_{\text{des}} U_{\text{des}}^n \left. \right] \\
\bar{M}_{\text{des}} \gamma_{\text{des}}^{n+1} &= \bar{M}_{\text{des}} \gamma_{\text{des}}^n - \Delta t \left[F_{\text{des}} \delta_{ij} C_{\text{des}} \left(\frac{U_{\text{des}}^n}{W} \right)_{\text{des}} \gamma_{\text{des}}^n + N_{\text{des}} \delta_{ij} T_{\text{des}}^n (U_{\text{des}}^n + U_{\text{des}}^n) + Z_{\text{des}} \delta_{ij} T_{\text{des}}^n \gamma_{\text{des}}^n \left(\frac{U_{\text{des}}^n}{h} \right)_{\text{des}} + N_{\text{des}} \delta_{ij} T_{\text{des}}^n (U_{\text{des}}^n + U_{\text{des}}^n) \right. \\
&+ Z_{\text{des}} \delta_{ij} T_{\text{des}}^n \gamma_{\text{des}}^n \left(\frac{U_{\text{des}}^n}{h} \right)_{\text{des}} \left. \right]
\end{aligned}$$

ここに、 $\bar{M}_{\text{des}}$ は集中化質量マトリックスであり、 $\bar{M}_{\text{des}}$ は(8)式のように表わす。

$$\bar{M}_{\text{des}} = (1 - e) M_{\text{des}} + \bar{M}_{\text{des}} \quad (0 \leq e \leq 1) \quad (8)$$

また、 e は混合比である。

4. 数値解析例 本手法に対する解析例として

図2のような水路に関する水深の変化を検討してみた。ただし、水路の平均水深は一様に1mである。

そこで、水路を図2のように要素数1012、節点数553に要素分割する。計算条件として、底質の粒径

は0.2mm、空隙率は0.3とした。尚、今回の計算において、 U_0, U_0, γ_0 は零として、静水状態より始めた。

境界条件としては、入口A-Dの中心点において、 $U_1 = 1.0 \text{ m/s}$ となるような放物流を与え、境界A-B, C-Dでは流速を零とした。図3, 図4は収束した状態の流速図と等深図である。図4において、堤防の左側、つまり上流側は大きく共振され、下流側に堆積されていることが示されており、妥当な結果であると思われる。尚、以上の計算において、微小増分時間 $\Delta t = 0.2 \text{ 秒}$ 、配分マトリックスの混合比は各方程式とも0.8である。

5. 結言 有限要素法によって、水の流動とともに底質の移動も同時に解析できることが示された。

また、有限要素法を用いた解析では、境界形状を任意に近似することができ、より正確な解析が期待できる。

参考文献

1) J.P. Lepetit, A. Hauguel : A Numerical Model for Sediment Transport, Marin Forecasting, Elsevier Oceanography Series 25, 453-463 Elsevier Scientific Publishing Company, 1979

2) M. Kawahara, H. Hirano, K. Tsubota, and K. Inagaki : Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow, Int. Jour. Meth., Fluid, vol. 2, 89-112, 1981

図2 要素分割図

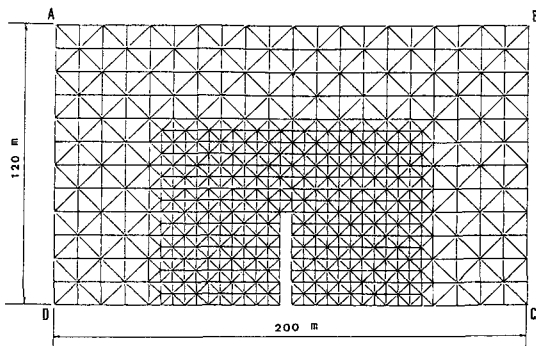


図2 要素分割図

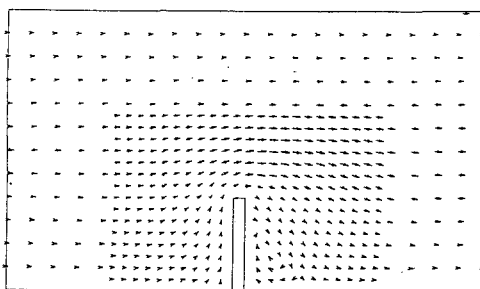


図3 流速図

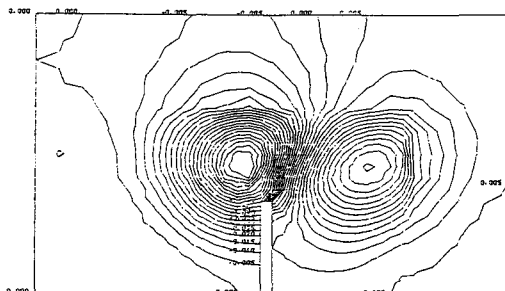


図4 等深図