

東京都立大学 正員 安川 浩
東京都立大学 正員 〇字井 正和

1. まえがき 多数のライザーを有する管内振動流を解析するにあたり、振動の物理的特性や予測性を含む方法として、モード解析法を用いたが、その解析手順については前報¹⁾に詳述した。今回は、管路が5本続く系を例にとり、モード解析の結果の信頼性を調べると共に、管路数が増えた場合のこの解析法の煩雑さと克服し、より簡便に算出する方法について検討した。

2. モード解析と数値積分との比較 右図のような管路系における流量 Q_i に関する方程式は次式で表わされる。

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{g A_{ci}}{l_i} (\eta_{i+1} - \eta_i) - \frac{g n_i^2}{A_{ci} R_i^{\frac{5}{4}}} Q_i^2 \quad (1)$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{1}{S_i} (Q_i - Q_{i-1}) \quad (2)$$

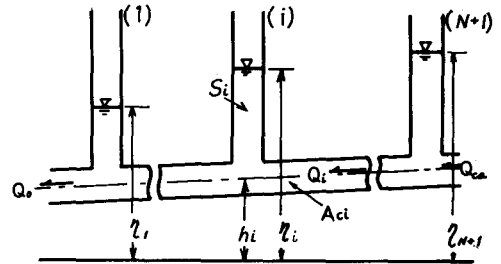


図 (1)

これらの式はマトリックス形式、 $[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{P\}$ 、で表われ、 Q_i の変化が微小で、マトリックス $[K]$ が対称行列である時は、 $\ddot{q}_i + 2\omega_i h_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = P_i^* / Y_i^*$ の解 q_i を用いて、 Q_i が、 $\{Q\} = \{Y\} \cdot \{q\}$ で求められる事は前報で述べた。ここに $\{Y\}$ はモードマトリックスであり、解 q_i は次式となる。

$$q_i(t) = e^{-\alpha_i h_i t} \{ A_{1i} \sin \alpha_i t + A_{2i} \cos \alpha_i t \} + \text{特解} \quad (\alpha_i = \sqrt{\omega_i^2 - \omega_i^* h_i^2}) \quad (3)$$

このようなモード解析による解がどの程度信頼性のあるものか確認するために、5次の自由度をもつ管路系を例にとりて検討する。管路系の諸量は、 $l_i = 330 \text{ cm}$ 、 $d = 10 \text{ cm}$ 、 $(A_{ci} = S_i)$ 、 $n_i = 0.01$ であり、外力として下流端流量 Q_5 が、 $Q_5 = \bar{Q}(1 - \alpha \sin \omega t)$ のように変化するとした。ここに $\bar{Q}$ は初期流量、 α は $\bar{Q}$ に対する流量変動分の振巾の比、であり、ここでは0.1とした。基礎方程式と直接 Runge-Kutta-Gill 法で数値積分したもの

とモード解析による結果を比較したのが図(2)である。縦軸はライザー内水位であり、横軸は外力の振動周期($2\pi/\omega$)を単位としたものである。ライザー内水面振動を求めるには、 Q_i を(2)式へ代入して積分すればよく、積分定数は初期水位設定のために用いた。図から明らかなように、両者共極めてよく一致しており、非線型方程式と線型方程式と見ればモード解析の結果が十分信頼出来る事が証明された。

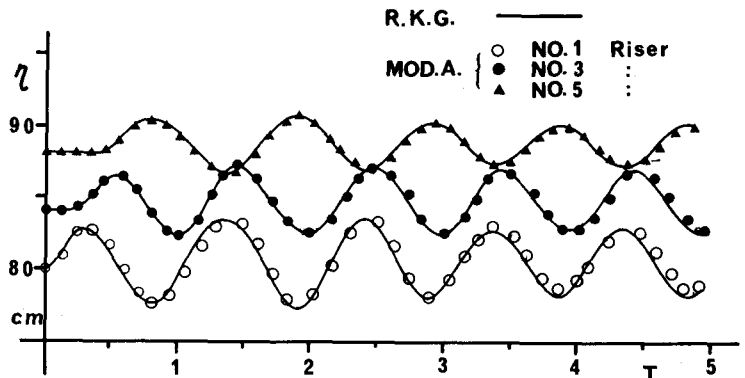


図 (2)

3. モード解析の簡便化 モード解析法の応用においては、方程式の線型性、固有関数の直交性を期すために、管路系の諸量に条件を付けざるを得ない。(今回は l_i 、 S_i 、 A_{ci} 、 n_i が各々全一定とした。)

しかし、それでもなお、固有関数を求め、 q_i とその中に含まれる積分定数 A_{1i} 、 A_{2i} の決定、さらに水位 η_i

と求めるための $q_i(t)$ の積分等かなり面倒な計算を行わなければならないし、管路数が増大すればその手間も膨大となる。管内流体振動を工学的見地から見た場合、全ての位相における水位変動よりも、その最大振中が求められれば十分という事も多い。構造力学での歪みや変位、地震波形の解析等では、固有値の小さい方のいくつかの固有関数を加え合わせて運動形態を把握する方法が通常用いられるが、ライザー内水面振動の場合には、 $q_i(t)$ の積分値が必要となるため、 $q_i(t)$ 内の定数項の積分値が時間と共に増大し、一部の固有関数の組合せだけでは収束してしまい、結果が得られなくなる。つまり固有関数の一部を省略する事は不可能である。

それ故、 $q_i(t)$ を積分して $\hat{q}_i(t)$ ($\hat{q}_i(t)$ で表わす) から計算を簡略する事も考える。 $\hat{q}_i(t)$ は (3) 式を積分すればよいが、特解を具体化するため Q_i を前記の形で表わされるとして、 $\hat{q}_i(t)$ は次式となる。

$$\hat{q}_i(t) = \frac{-1}{\omega_i^2} e^{-\omega_i h_i t} \{ (A_{1i} \alpha_i + A_{2i} \omega_i h_i) \cos \alpha_i t + (A_{1i} \omega_i h_i - A_{2i} \alpha_i) \sin \alpha_i t \} + \frac{1}{\omega_i} \{ C_i \sin \omega t + D_i \cos \omega t \} + E_i t \quad (4)$$

$$C_i = \frac{\delta_i \alpha_i \cdot 2 \omega_i h_i \omega}{(\omega_i^2 - \omega)^2 + 4 \omega_i^2 h_i^2 \omega^2}, \quad D_i = \frac{\delta_i \alpha_i \cdot (\omega_i^2 - \omega^2)}{(\omega_i^2 - \omega)^2 + 4 \omega_i^2 h_i^2 \omega^2}, \quad E_i = \frac{\gamma_i}{\omega_i^2}, \quad P_i = \gamma_i - \delta_i \sin \omega t \quad (5)$$

γ_i , δ_i は外力 P_i の式を分解した時の定数部分と、 $\sin \omega t$ の係数である。

管内振動が固有周期の影響を受けるのは、時間がある程度経過した後に考えられる。すると (4) 式のオ一项は、角速度 α_i の周期運動が $\exp(-\omega_i h_i t)$ で減衰していく事を示し、さらに ω_i^2 で除れているので大きな固有値の影響は相対的に小さくなる。即ち、外力が作用してからある程度時間が経つと $\hat{q}_i(t)$ のオ一项は微量と考えられ、結局 (4) 式は次式で近似できる。

$$\hat{q}_i(t) \approx \frac{1}{\omega} \{ C_i \sin \omega t + D_i \cos \omega t \} + E_i t \quad (6)$$

図 (3) は、 $\hat{q}_i(t)$ に対する完全式 (4) と、近似式 (6) の値の差を振動振中で除して % で表わしたものを、外力の振動回数上にプロットしたものである。

図からわかるように、値のズレは最初極めて大きいですが、振動がくり返えされるにつれて急速に小さくなり 4 周期ごろには 3% 以内に入っている。即ち、水面振動の特徴を簡単に見るには、外力の振動周期の 4 倍あたりの時間で (6) 式を用いれば、十分な精度の結果が期待出来る。又 (6) 式を用いる利点として以下の事が云える。

(4) 式のオ一项には積分定数 A_{1i}, A_{2i} が含まれており、これらは初期条件

($Q_i(0) = \text{const.}$, $dQ_i(0)/dt$) から求めなければならない計算が煩雑である。オ一项以下の C_i, D_i, E_i は固有値と外力の形が決定した段階で (5) 式から求まる。それ故 (6) 式によって簡単に水位変動が計算出来る。

4. まとめ 1). モード解析の多自由度管内振動への応用は、マトリックス $[K]$ の対称性と微小振中の仮定の成立範囲において、R. K. G. 法による数値解とよく一致し、誤差の小さな結果が得られる。2). 時間 t が外力の周期の 4 倍以上なら、 $q_i(t)$ に関する微分方程式の“特解”のみを用いる事によって 3% 以内の精度で容易に値を求める事が出来る。今回はマトリックス $[K]$ の対称性を仮定したが、今後、より一般的に管路系や管路網への適用が課題として残されている。

5. 参考文献 (1) オ 36 回年講. 1981 (2) 有限要素法による振動解析 戸川 サイエンス社

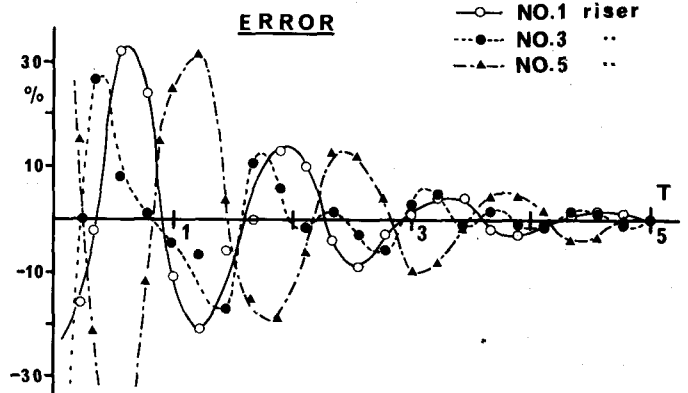


図 (3)