

農業土木試験場 正会員 島田 正志・奥島 修二

1 多大な計算時間を必要とするパイプライン過渡現象の数値解析には、精度良く、安定で、計算時間の少ない効率的手法を使用すべきである。本稿では、圧力伝播速度(α m/s)が流速(V_0 m/s)より十分に大きな場合に、従来の方法(Newton-Raphson法)より効率的な陽的解法を特性曲線法に基づいて提案する。

2 基礎方程式 ($\alpha \gg V_0$)

$$\partial V / \partial T + g \partial H / \partial X + F V |V|^m = 0 \quad (1)$$

$$\partial H / \partial T + (\alpha/g) \partial V / \partial X = 0 \quad (2)$$

V = 流速(m/s), H = 基準面からの水頭(m), T = 時間(s)
 X = 距離座標(m), g = 重力加速度(m/s²), F = 抵抗係数の一般的表現, m = ベキ指数.

(1), (2) 式を無次元特性形式(3)~(6)とする。

$$C^+ \quad dx/dt = 2 \quad (3)$$

$$dh + B dv + \sigma v |v|^m dt = 0 \quad (4)$$

$$C^- \quad dx/dt = -2 \quad (5)$$

$$-dh + B dv + \sigma v |v|^m dt = 0 \quad (6)$$

$$v = V/V_0, \quad h = H/H_0, \quad t = T/(2L_0/\alpha), \quad x = X/L_0$$

$$B = (\alpha V_0/gH_0), \quad \sigma = 2F V_0^{m+1} L_0/(gH_0), \quad \text{suffix } o$$

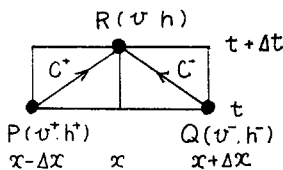
は、代表量を示す。

3 特性差分式

(4), (6) 式の抵抗項を

2次近似して、(7)(8)式

を得る。



$$C^+ \quad (h - h^+) + B(v - v^+) + \varepsilon(v + v^+) |v + v^+|^m = 0 \quad (7)$$

$$C^- \quad -(h - h^-) + B(v - v^-) + \varepsilon(v + v^-) |v + v^-|^m = 0 \quad (8)$$

$$\text{ただし } \varepsilon = (\sigma/2^{m+1}) \Delta t$$

差分化に伴う分散化誤差は、例えば、 C^+ に対して

$$\int_t^{t+\Delta t} v(t)^{m+1} dt - \left[\frac{v(t) + v(t+\Delta t)}{2} \right] \Delta t \approx O(\varepsilon^3) \quad (9)$$

通常、(10)式をNewton-Raphson法で解く。

$$h - h^+ + B(2v - v^+ - v^-) + \varepsilon[(v + v^+) |v + v^+|^m + (v + v^-) |v + v^-|^m] = 0 \quad (10)$$

4 陽解法の提案 (級数解)

効率的計算の考へ方：必要とする精度の解を最少限の演算回数で求めること。

そこで、解を ε のベキ級数(11), (12)式として求め解の内容を詳しく調べる。 v^+ , v^- , h^+ , h^- も、(13), (14)式の形とする。

$$v = \tilde{v}_0 + \varepsilon \tilde{v}_1 + \varepsilon^2 \tilde{v}_2 + O(\varepsilon^3) \quad (11)$$

$$h = \tilde{h}_0 + \varepsilon \tilde{h}_1 + \varepsilon^2 \tilde{h}_2 + O(\varepsilon^3) \quad (12)$$

$$v^\pm = v_0^\pm + \varepsilon v_1^\pm + \varepsilon^2 v_2^\pm + O(\varepsilon^3) \quad (\text{複合同期}) \quad (13)$$

$$h^\pm = h_0^\pm + \varepsilon h_1^\pm + \varepsilon^2 h_2^\pm + O(\varepsilon^3) \quad (14)$$

$$\tilde{v}_0 = [v_0^+ + v_0^- + (h_0^+ - h_0^-)/B]/2$$

$$\tilde{h}_0 = [B(v_0^+ - v_0^-) + (h_0^+ + h_0^-)]/2$$

$$\tilde{v}_1 = [v_1^+ + v_1^- + (h_1^+ - h_1^-)/B]/2 - [P_0 |P_0|^m + \tilde{g}_0 | \tilde{g}_0|^m]$$

$$\tilde{h}_1 = [B(v_1^+ - v_1^-) + (h_1^+ + h_1^-)]/2 - [P_0 |P_0|^m - \tilde{g}_0 | \tilde{g}_0|^m]$$

$$\tilde{v}_2 = [v_2^+ + v_2^- + (h_2^+ - h_2^-)/B]/2 - (m+1) [P_1 |P_0|^m + \tilde{g}_1 | \tilde{g}_0|^m]/(2B)$$

$$\tilde{h}_2 = [B(v_2^+ - v_2^-) + (h_2^+ + h_2^-)]/2 - (m+1) [P_1 |P_0|^m - \tilde{g}_1 | \tilde{g}_0|^m]$$

$$\text{ただし } P_0 = \tilde{v}_0 + v_0^+, \quad \tilde{g}_0 = \tilde{v}_0 + v_0^-, \quad P_1 = \tilde{v}_1 + v_1^+, \quad \tilde{g}_1 = \tilde{v}_1 + v_1^-.$$

以上と同様の内容を有する解を数値解析で求めるには、P点(v^+ , h^+), Q点(v^- , h^-)を級数形でなく直接使用する必要がある。そこで、 $O(\varepsilon^3)$ の誤差で(11), (12)式とは異なる形の解(15), (16)を求める。

$$v = \tilde{u}_0 + \varepsilon \tilde{u}_1 + \varepsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\varepsilon^3) \quad (15)$$

$$h = \tilde{u}_1 + \varepsilon \tilde{u}_2 + \varepsilon^2 \tilde{u}_3 + O(\varepsilon^3) \quad (16)$$

(10), (15), (16)式より、 v については

$$\tilde{u}_0 = [v^+ + v^- + (h^+ - h^-)/B]/2 \quad (17)$$

$$\tilde{u}_1 = -[(\tilde{u}_0 + v^+)/\tilde{u}_0 + v^+|^m + (\tilde{u}_0 + v^-)/\tilde{u}_0 + v^-|^m]/(2B) \quad (18)$$

$$\tilde{u}_2 = -(m+1) [\tilde{u}_0 + v^+|^m + \tilde{u}_0 + v^-|^m] \tilde{u}_1/(2B) \quad (19)$$

(13)式と(17), (18), (19)式代入して、(15)式を求めれば、 $O(\varepsilon^3)$ で(11)式と一致することが証明される。

級数解法の定式化

① 既知量(v^+ , h^+), (v^- , h^-)を使用して、(17), (18), (19).

(15)式より、 v を計算する。

② v を(17)又は(18)式に代入して、 h を求める。

5 Newton-Raphson法との比較 (N-R-Mと略記)

① N-R-Mの従来の計算ルール

初期値として $u = (u^+ + u^-)/2$ を用いた場合、2回の Iteration を要する。これは、(15)、(17)、(18)、(19) より 2 倍程度多くの演算回数に要するのど能率的でない。

そこで、初期値として、 $\tilde{u}_0$ (非粘性解) を用いる。この時、補正項 Δu は、(20) 式となる。

$$\Delta u = -\frac{\epsilon}{2B} \left[(\tilde{u}_0 + u^+) |\tilde{u}_0 + u^+|^m + (\tilde{u}_0 + u^-) |\tilde{u}_0 + u^-|^m - \epsilon \frac{(m+1)}{2B} (|\tilde{u}_0 + u^+|^m + |\tilde{u}_0 + u^-|^m) \cdot ((\tilde{u}_0 + u^+) |\tilde{u}_0 + u^+|^m + (\tilde{u}_0 + u^-) |\tilde{u}_0 + u^-|^m) \right] + O(\epsilon^3) \quad (20)$$

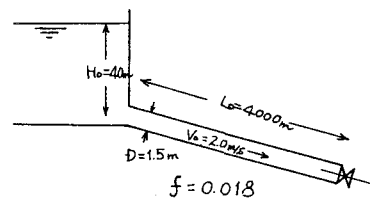
従って、(20) 式は、(15) 式の第 2、3 項と対応している。これは、N-R-M の 2 次収束性を示すものだが、以上のアルゴリズムは、通常の意味でのくり返し計算を要しないことを示している。

次表では、1 次近似・2 次近似 (級数解・N-R-M) の未知流速を解くのに要する演算回数を示す。

	加減	乗除	べき
1 次近似	5	5	2
2 次近似			
級数解	9	7	2
N-R-M	11	9	2

6 計算結果の比較

解析モデル



$$(1) \text{式} \quad F = f/(2D) \quad m = 1$$

α : 弾性波速度 (m/s): 500, 1000, 1500 m/s

f : Darcy-Weisbach の摩擦係数
 N : 分割数 = 5, 10, 20, 40

境界条件

- ・上流端 水頭一定の圧力境界
- ・バルブ $t=0$ から $t=t_c$ ($t_c = \frac{L}{\alpha}$) で流速を 2.0 m/s から 0.0 m/s に線形に変化させる
流速境界

α	N	SERIES SOLUTION	NEWTON-RAPHSON METHOD	ANALYTIC SOLUTION
500.0	5	3.4656	3.4656	3.4656
	10	3.4649	3.4649	3.4649
	20	3.4647	3.4647	3.4647
	40	3.4647	3.4647	3.4647
1000.0	5	6.0164	6.0163	6.0163
	10	6.0157	6.0157	6.0157
	20	6.0155	6.0155	6.0155
	40	6.0155	6.0155	6.0155
1500.0	5	8.5661	8.5661	8.5661
	10	8.5655	8.5655	8.5655
	20	8.5653	8.5653	8.5653
	40	8.5653	8.5653	8.5653

最大水撃圧の比較 ($t_c = 1.0$)

t	陽解法		NEWTON-RAPHSON METHOD	
	AT MIDPOINT	AT VALVE	AT MIDPOINT	AT VALVE
0.0	$v = 1.0$ $h = 0.8776$	1.0 0.7553	1.0 0.8776	1.0 0.7553
0.5	$v = 0.8778$ $h = 1.5083$	0.75 2.0580	0.8778 1.5083	0.75 2.0580
1.0	$v = 0.5143$ $h = 2.2053$	0.5 3.4053	0.5143 2.2053	0.5 3.4053
1.5	$v = 0.1373$ $h = 1.6917$	0.25 2.3439	0.1373 1.6917	0.25 2.3439
2.0	$v = -0.0105$ $h = 1.0616$	0.0 1.1219	-0.0105 1.0616	0.0 1.1219
2.5	$v = -0.0121$ $h = 0.9464$	0.0 0.9282	-0.0121 0.9464	0.0 0.9282
3.0	$v = 0.0105$ $h = 0.9384$	0.0 0.8782	0.0105 0.9384	0.0 0.8782
3.5	$v = 0.0121$ $h = 1.0536$	0.0 1.0717	0.0121 1.0536	0.0 1.0717
4.0	$v = -0.0105$ $h = 1.0615$	0.0 1.1217	-0.0105 1.0615	0.0 1.1217

($\alpha = 1000 \text{ m/s}$, $N = 10$, $t_c = 2.0$)

過渡現象の比較

7 結論

特性差分式を解く際、未知量の非線型方程式中に離散化誤差を表現する微小パラメーターがある場合には、Newton-Raphson 法による解の基準があるいは、explicit を級数解が得られ、精度良く、能率的計算を手に入る。

参考文献

Fluid Transients. Wylie and Streeter
 1978. McGraw-Hill.