II-137　段波の伝播特性に関する数値シミュレーションについて (2)

京都大学工学部　正員　多田彰秀
京都大学工学部　正員　岩佐義朗
大　阪　市　正員　植村典央

1.はじめに；　段波は，洪水波などと比較すれば時間的な変化が急な水理現象である。その解析法は，従来より極めて単純化された条件のもとで手計算的な方法が主としてなされ，境界条件などが複雑な場合の電子計算機による機械的な数値シミュレーションはその例が少ない。本報は，段波の波先部の挙動およびその伝播特性を電子計算機による機械的計算によって数値シミュレーションする方法の開発を目的としたものであり，始めに前報[1]で述べた運動量解析法に基づく特性曲線法について要約し説明するとともに，その問題点を列挙する。その後，列挙した問題点を解決しうる新たな計算方法について考えを述べたものである。

2.基礎式とその特性曲線表示；　ここでは，一様な長方形断面水路内に発生する段波を対象とし，運動量解析法を適用する。基礎式は，次式によって構成される[2]。

連続式　；　$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

運動量式　；　$$\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\beta U}{g}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\lambda'\cos\theta}{A}\frac{\partial}{\partial x}(h_G A)=S_o-S_f \qquad (2)$$

さらに，(1)および(2)式を特性曲線表示に書き改めると，

特性曲線　；　$$\frac{dx}{dt}=\beta U\pm C \qquad (3)$$

特性方程式；　$$gA(S_o-S_f)dt+\frac{\beta U^2-\lambda' g\cos\theta\frac{A}{B}}{\beta U\pm C}dA-dQ=0 \qquad (4)$$

が得られる（複号同順）。

ここで，$C=\sqrt{\beta(\beta-1)+\lambda' gA\cos\theta/B}$，B：水面幅　である。

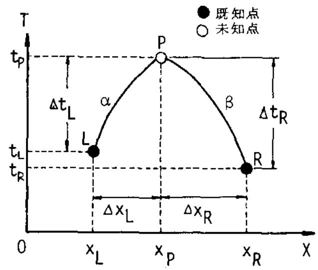


図-1 x-t平面内の特性曲線

3.特性曲線の差分化；　(3)および(4)式を既知点より未知点まで積分し，さらに台形公式による近似を行うと次式が得られる（図-1参照）。

(i)正の特性曲線(α)について；

$$E(x_p,t_p,Q_p,A_p)=x_p-x_L-[(\beta U_p+C_p)+(\beta U_L+C_L)]\frac{(t_p-t_L)}{2}=0 \qquad (5)$$

$$F(x_p,t_p,Q_p,A_p)=[A_p(S_{op}-S_{fp})+A_L(S_{oL}-S_{fL})]g\frac{(t_p-t_L)}{2}-(Q_p-Q_L)+\left[\frac{\beta U_p^2-\frac{\lambda' g\cos\theta}{B_p}A_p}{\beta U_p+C_p}-\frac{\beta U_L^2-\frac{\lambda' g\cos\theta}{B_L}A_L}{\beta U_L+C_L}\right]\frac{(A_p-A_L)}{2}=0 \qquad (6)$$

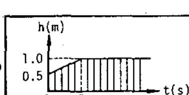
(ii)負の特性曲線(β)について；

$$G(x_p,t_p,Q_p,A_p)=x_p-x_R-[(\beta U_p-C_p)+(\beta U_R-C_R)]\frac{(t_p-t_R)}{2}=0 \qquad (7)$$

$$H(x_p,t_p,Q_p,A_p)=[A_p(S_{op}-S_{fp})+A_R(S_{oR}-S_{fR})]g\frac{(t_p-t_R)}{2}-(Q_p-Q_R)+\left[\frac{\beta U_p^2-\frac{\lambda' g\cos\theta}{B_p}A_p}{\beta U_p-C_p}-\frac{\beta U_R^2-\frac{\lambda' g\cos\theta}{B_R}A_R}{\beta U_R-C_R}\right]\frac{(A_p-A_R)}{2}=0 \qquad (8)$$

なお，上式の添字LおよびRは，図-1の既知点LおよびRでの水理量・位置を，添字Pは未知点Pでの水理量・位置を示している。

4.計算法とその問題点；　図-1に示される中間点は，未知量が4個であるから，(5)～(8)式の四式を用いて収束計算(Newton-Raphson法)によって求める。境界点では，成立する式が二式となるので，未知量のうちいずれか1個を境界条件として与え同様な収束計算によって求める。また，段波波先部の軌跡については，同族の特性曲線(α)の最初の交点から，不連続部における質量に関するRankine-Hugoniotの条件[3]より得られる段波の速度Wをexplicitに求め，次の同族の特性曲線との交点まではWが近似的に一定とみなして求める。このような計算方法で，全長50m，幅5 mの長方形断面の一様水路を想定し，上流端で水位ハイドログラフ(図-2参照)を，下流端で一定水深(初期水深)を与えることによって発生する段波の数値シミュレーションを行った結果が図-3である。このケースでは水路は水平で滑らかなものと仮定している。図中央部の太線が，段波波先



$$h(t)=\begin{cases}h_o+a_1 t & 0\le t\le 5\\ 2h_o & 5<t\end{cases}$$

$h_o=0.5(m),\ a_1=0.1(m/s)$

図-2 上流端の水位ハイドログラフ

の軌跡である。この計算法は，同族の特性曲線の交差が段波であるという解釈のもとに立って開発した計算方法である．しかしながら，①段波の波先部で運動量保存則を用いていないこと，②波先の軌跡を特性曲線(β)が横切る際に不連続性が考慮されていないこと，③段波の速度Wは，既知点での値のみを用い未知点での値が考慮されていないこと　といった問題点を含んでおり満足すべき計算法であるとは言えない。

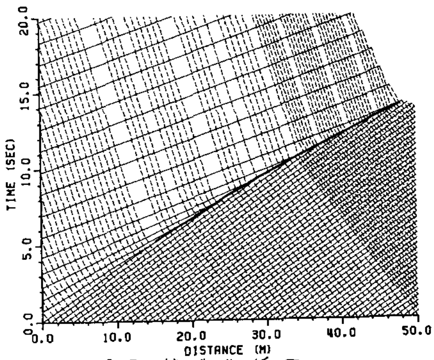


図-3 特性曲線図

5.計算法の改良； 次に，上で列挙された問題点の解決のために以下のように計算法を改良し，それについて説明を加える。簡単のため水路は水平で滑らかなものと仮定する。①段波が最初に生じる位置(S点，図-5参照)：上流端での水位変化[$h(t)=h_0+a_1t$]によって段波が最初に発生するx-t平面上での位置(x_s, t_s)は，Strelkoff[4]らに倣って求めると次式のようになる。ただし，h_0，U_0：初期定常状態の水深と流速，C_0：初期状態における微小擾乱の伝播速度，$F_{r0}=U_0/C_0$である．

$$x_s=\frac{2h_0C_0}{3a_1}(F_{r0}+1)^2 \qquad (9) \quad , \qquad t_s=\frac{2h_0}{3a_1}(F_{r0}+1) \qquad (10)$$

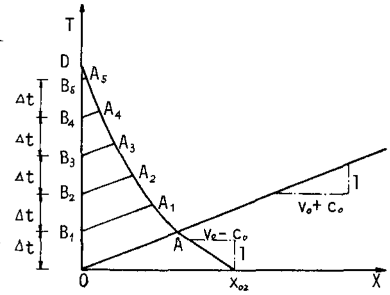


図-4 点Dの算出方法

②t軸上の点D(図-4参照)：x軸上に任意の点(x_{02}, 0)を与えてやり擾乱域と静水域との境界となっている初期特性直線上の点Aを求める。さらに，微小時間Δtを設定しt軸をΔtごとに分割するとともに，その点をB_1，B_2，…とする。その後，まず既知点であるB_1点とA点間に前述の(5)～(8)式を用い収束計算によりA_1点を求める。ついでB_2点とA_1点から同様にしてA_2点を計算する。このような計算を順次進め，最後に(7)，(8)式によってD点を求める。このような方法に従がえば，x_{02}をパラメーターとして変化させることにより，それに対応するt軸上の点Dが容易に求められる。③段波の波先の軌跡：まず図-5に示された点Dと点Sとの間に(5)～(8)式を用い収束計算により点Eを求める。

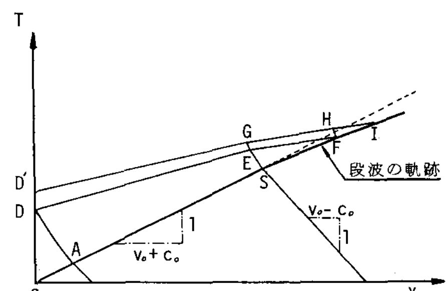


図-5 段波の軌跡

ここで，点Eから出る正の特性曲線が波先の軌跡と交差する点をFとすれば，点Fでの未知数は，Q_F, A_F, x_F, t_F, W_Fの5個となる。EF間で特性曲線(α)が直線であると仮定するならば，次の五つの式が成立する。すなわち，

$$x_F-x_E=[(\beta U_F+C_F)+(\beta U_E+C_E)]\frac{(t_F-t_E)}{2} \qquad (11)$$

$$\left[\frac{\beta U_F^2-\frac{\lambda' g\cos\theta}{B_F}A_F}{\beta U_F+C_F}+\frac{\beta U_E^2-\frac{\lambda' g\cos\theta}{B_E}A_E}{\beta U_E+C_E}\right]\frac{(A_F-A_E)}{2}-(Q_F-Q_E)=0 \qquad (12)$$

[ただし，Mは比力を表わす　$M=\frac{\beta Q^2}{gA}\lambda' h_G A\cos\theta$]

$$Q_F-Q_0=W_F(A_F-A_0) \quad (13) \; , \quad g(M_F-M_E)=W_F(Q_F-Q_0) \quad (14) \; , \quad x_F-x_s=\frac{1}{2}(W_s+W_F)(t_F-t_s) \quad (15)$$

ここでの記号は，A_0：初期状態での流水断面積，$Q_0=A_0U_0$，W_s：点Sでの段波の速度である。これらの式を収束計算によって解くことにより上記の未知量は得られ，点Fおよびそこでの水理量(水深，流速)が決定できる。④点Dの近傍の点D'($t_{D'}>t_D$)を求め，D'点と先に求めたE点からG点を，さらにG点とF点からH点を求める。最後に上の五つの式を用いて収束計算を行いI点を算出する。このような計算法を順次繰り返し行うことにより段波の波先部の軌跡は，充分追跡可能となる．なお，この方法による計算結果については現在検討中である。

(参考文献)　1)岩佐，植村，他：段波の伝播特性に関する数値シミュレーションについて(1)，関西支部講演概要集，昭和57年度．
2)石原藤次郎編：水工水理学，丸善，1972年．　3)岩佐，井上，片山：開水路非定常流の数値計算法について，京都大学防災研究所年報，19-B-2，1976年．　4)G. Terzidis and T. Strelkoff：Computation of Open-Channel Surges and Shocks，ASCE，Vol.96，HY12，1970年．