

(株)新日本技術コンサルタント

正員 依藤 弘志

神戸大学工学部

正員 松井 順三郎

1. 序 本研究は近河問題にな。ていう瀬戸内海の赤潮に注目しその解析は有用と考えられる汚染物の拡散輸送を播磨灘を対象領域として簡単に電算機シミュレーションしようとするものでガラーキン有限要素法とガウスルジャントン数値積分法による数値シミュレーションを目標としている。又同時に物質収支計算を行ない換算結果をも得られるようにする。対象汚染物として河川からの流入CODを考慮している。

2. 拡散方程式の基礎方程式 三次元系の物質拡散の基礎方程式を鉛直積分し境界条件を与えた後、移流分散係数を導入して拡散係数を整理すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(H^*C) + \frac{\partial}{\partial x}(H^*UC) + \frac{\partial}{\partial y}(H^*VC) = \frac{\partial}{\partial x}(H^*D_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(H^*D_y \frac{\partial C}{\partial y}) + H^*(Q_0 - K_0 C) \quad (1)$$

H^* : 水深, C : 濃度, U, V : 流速, D_x, D_y : 移流分散係数, Q_0 : 内部発生源, K_0 : 自己減衰係数

3. 領域内貯留量の評価 領域内に対して流入するCODの項目毎にチェックし、その合計が領域内に存在すると考える。まず対象とする河川からの流入CODについては各河川の値が既知でありそれに経過時間に基づいて求める。次に自己減衰による減少は全領域にわたって積分しタイムステップを加算していく。内部発生源 Q_0 は今回考慮しない。最後に開境界についてはフランクスの法を境界上で線積分してタイムステップを加算していくことにより領域内貯留COD量を算出される。

4. ガラーキン有限要素法の導入 濃度に関して次の様な近似関数を定義する。

$$C_n = C_p N_p \quad p=1, 2, 3, \dots, n \quad n: \text{要素内結節点数}, N_p: \text{形状関数}, C_p: \text{節点値}$$

ここに p は平均水深 H と近似して(1)式をガラーキン法で定式化すると次式が得られる (Q_0 は省略した)

$$\sum_p \int_{\Omega} \{ N_p N_p C_p + N_p N_i \frac{\partial}{\partial x} D_x C_p + N_p N_j \frac{\partial}{\partial y} D_y C_p + N_p N_k K_0 C_p + (\frac{\partial N_p}{\partial x} \frac{\partial N_p}{\partial x} D_x + \frac{\partial N_p}{\partial y} \frac{\partial N_p}{\partial y} D_y) C_p \} dA \cdot H = \int_{\Omega} N_p H C_p \frac{\partial}{\partial t} C_p + \int_{\Omega} N_p H C_p \frac{\partial}{\partial x} C_p + \int_{\Omega} N_p H C_p \frac{\partial}{\partial y} C_p + \int_{\Omega} N_p H C_p K_0 C_p$$

5. 境界条件と初期条件 領域は固定境界(Γ_1), 自由境界(Γ_2), 河川流入口(B_0)の三種の境界で囲まれている。境界上の外向法線方向のフランクスの法を鉛直方向に平均して総和をとれば次式が与えられる。

$$S^* = H \{ (UC - D_x \frac{\partial C}{\partial x}) L_x + (VC - D_y \frac{\partial C}{\partial y}) L_y \}$$

Γ_1 に関しては $S^* = 0$ とすると $D_x \frac{\partial C}{\partial x} L_x + D_y \frac{\partial C}{\partial y} L_y = (UL_x + VL_y) C$ となる。(ただし Γ_1 上においては流速が全くないものと仮定しており両辺ともゼロとなり S^* は Γ_1 についてゼロとなる。 B_0 については近似的に $S^* = H C M_0$ と見なす。ここに M_0 は、河川から単位時間に流入する全物質質量(const)を表わし河川からの負荷量はここに入力される。最後に Γ_2 については従来 S^* を無視する手法や一定の濃度を与える手法等が採られてきたが、今回は濃度フランクスの法を濃度の関数として左辺に移項して未知量化してしまうこととした。又、初期条件としては全領域にわたって濃度ゼロを与えた。従って貯留量の計算もゼロからスタートする。

6. 要素と数値積分法 本研究においては領域を一次の矩形要素に分割している。

図-1は一次矩形要素を示す。形状関数 N_n は次のように与えられる。

$$N_1 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4, \quad N_2 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$$

$$N_3 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4, \quad N_4 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4$$

ξ, η 座標と x, y 座標の関係は次の式で表わされる。

$$\xi = x/N_x, \quad \eta = y/N_y \quad x=1, 2, 3, \dots, n \quad x_n, y_n: \text{節点座標}$$

図-2は播磨灘の要素分割の図を示す。

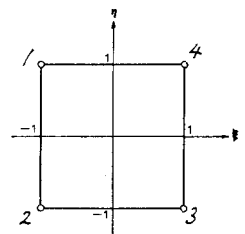


図-1

座標系の性質から形状関数 \$N_k\$ の \$x\$ と \$y\$ による偏微分係数は次の様に表わされた。ここに \$[J]\$ はヤコビ行列。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

\$f(x, y)\$ を要素内や要素の一定上で積分すると次のように書ける。

$$\int_{A_e} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) da + [J] d\xi d\eta$$

$$\int_p f(x, y) dp = \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \quad \text{又は}$$

$$\int_p f(x, y) dp = \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} d\eta$$

この積分を実際に行うには数値積分法を用いる。本研究ではガウス・ジャコビ法を用いた。

7. 時間積分法 ガラーキン法により拡散方程式が時間に関する一階の常微分方程式に変換され、本研究ではこの方程式を陰解法の Crank-Nicholson 法を用いて解く。一階の常微分方程式は \$N \dot{C} + F C = E\$ と書ける。ここに \$N\$ は \$\int_{A_e} N_k N_k dA_e\$、\$C\$ は未知変数を含むベクトル、\$F\$ は時間微分項を管する項、\$E\$ は既知数のマトリックスである。これを \$k+1\$ レベルで評価し \$F_{k+1}\$ に便宜上 \$F_k\$ を用いると次のように書ける。

$$(N + \frac{\Delta t}{2} F_k) C_{k+1} = (N - \frac{\Delta t}{2} F_k) C_k + \Delta t E$$

これによって \$C_k\$ から \$C_{k+1}\$ が求められた状態が本研究ではこの連立一次方程式をガウス消去法のサブプログラム (GAU-EL-D) によって解いた。

8. 結果 定数として \$D_x D_y = 100 m^2/s\$、\$k_r = 0.75/d\$、\$H = 19.37 m\$ 他に添入 C.O.D 値を用いた。若干の節点で負濃度が発生したがこれは強制的にゼロとし直した。次のステップに進み、得られた解のうち負でない(ゼロでない)値のみで濃度分布を描かれた。図-3 に領域内 C.O.D 貯留量と開境界出入量の累積を示す。図-4 は濃度分布図でコンターラインは濃度のオーダーを表わしている。

表-1

	流量	C.O.D.	負荷
加古川	19.41	5.78	73.37
市川	4.85	8.56	41.52
瀬保川	15.21	12.58	191.34
千歳川	13.15	1.11	14.60
堀川	81.92	1.86	152.37
吉井川	62.64	1.86	116.51
	cc/秒	ppm	g/秒

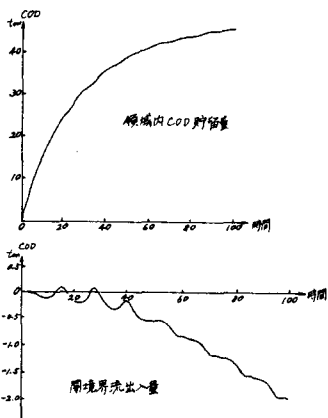


図-3

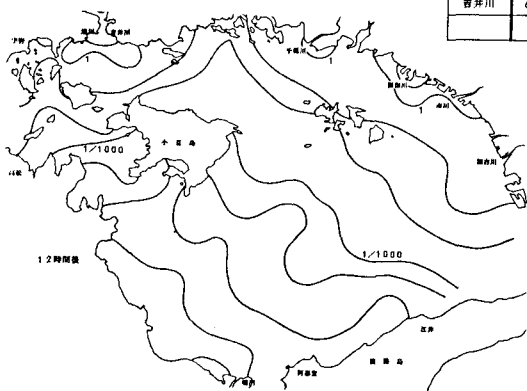


図-4

9. 結論 結果は予想された濃度分布を示し、途中の強制的な法による誤差は少ないものと思われる。それは収束関係が定常状態に近づいていることにより肯定されていると考えられ、今回程度の要素分割によって得られた近似として十分なものと思われる。ただし開境界の外に對して全く無関係である事は汚染源の問題から検討を要する。

- 参考文献 1) O. C. Zienkiewicz 著 "基礎工学におけるマトリックス有限要素法" 培風館 (1975)
 2) J. J. コナー, C. A. ブレミア著 "数値解析への有限要素法の応用" サイエンス社 (1970)
 3) 松梨順三郎著 "水理学" 朝倉書店 (1975)
 4) 菅名誠治 "橋原龍の潮流汚濁解析" 神戸大学修士論文 (1979)