

1. はじめに

固体粒子の懸濁液中に挿入された傾斜板下面に薄い清澄層の生成する事実が実験的に認められている。この層の発達、粒子沈降により生じる沈降対流に起因するものである。清澄層内には、かなり速く定常に達する流れが存在し、清澄液は速やかに懸濁液の上層部へ物動する。その為、傾斜板を挿入した沈澱池は、傾斜板を挿入しないものに比して、清澄液の生成速度が大きくなる。傾斜壁面を有する容器内での粒子沈降が促進される現象は、従来から、Boycott Effect として知られており、宇野式傾斜板沈澱槽などに利用されている。この様な、粒子沈降促進の現象は経験的に知られてはいるものの、理論的な検討は殆んどなされてはいない。ここでは、傾斜板沈澱池の設計に対する基礎的資料を得る事を目的として、傾斜板下面に生成する清澄層内の流動特性について理論的な検討を加えた。流れの支配方程式は Prandtl の境界層近似によって導かれるものである。

2. 清澄層流れの支配方程式

懸濁液中の傾斜板下面には Fig. 1 に示す様な清澄層が発達し、その内部に流れが存在する (Fig. 1 は清澄層を誇張して描いてある)。流れを定常2次元とし、傾斜板下面に沿って上向きに x 軸を、これと垂直下向きに y 軸をとる。また、流速の x, y 成分をそれぞれ u, v とし、 θ を鉛直からの傾斜角、 $\delta(x)$ を清澄層の厚さとする。このとき、清澄層内の流れの支配方程式は、Prandtl の境界層近似を用いて、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \theta = \alpha \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Eqs. 1, 2 の様に表わされる。ただし、 u, v, x, y 等の変数はすべて無次元変数で、別の無次元変数 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{x}, \hat{y}$ に、それぞれ Eqs. 3, 4, 5, 6 で定義される伸縮変換を施し

$$u = \Lambda^{1/3} \hat{u}, \quad v = \hat{v}, \quad x = \hat{x}, \quad y = \Lambda^{1/3} \hat{y} \quad (3), (4), (5), (6)$$

たものである。また、無次元速度 $\hat{u}, \hat{v}$ は固体粒子の静止沈降速度 v_0 (ストークスの沈降速度) で、無次元座標 $\hat{x}, \hat{y}$ は傾斜板の長さ l で、それぞれ無次元化したものである。Eq. 1 の慣性項の係数 α は無次元

$$\alpha = R \Lambda^{1/3}, \quad \Lambda = \frac{l^2 g (\rho_s - \rho) C_0}{v_0 \mu}, \quad R = \frac{l d_p^2 g \rho (\rho_s - \rho)}{18 \mu} \quad (7), (8), (9)$$

量で、Eqs. 7, 8, 9 で定義される。ただし、 R = レイノルズ数、 Λ = 沈降ケラシヨフ数と R との比、 ρ_s = 粒子密度 [g/cm^3], ρ = 水の密度 [g/cm^3], μ = 水の粘性係数 [$g/cm \cdot sec$], C_0 = 懸濁液の体積濃度 [-], d_p = 粒子径 [cm], g = 重力加速度 [cm/sec^2] である。支配方程式 Eqs. 1, 2 に対する境界条件は傾斜板下面 ($y = 0$) と清澄層-懸濁液界面 ($y = \delta$) とにおいて、Eqs. 10, 11, 12 の様に与えられる。また、清澄層厚さ $\delta(x)$ は界面における固体

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad (10), (11), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = \delta \quad (12)$$

粒子の運動方程式 Eq. 13 によって求められる。ただし、 $u_0(x), v_0(x)$ は清澄層-懸濁液界面 ($y = \delta$) での $u,$

$$u_0(x) \frac{d\delta}{dx} = v_0(x) + \sin \theta \quad (13), \quad \delta = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (14)$$

v_0 値である。以上、要約すれば、清澄層内の流動特性は、Eqs. 1, 2, 13 を連立して解く事により決定される。

820317-F1

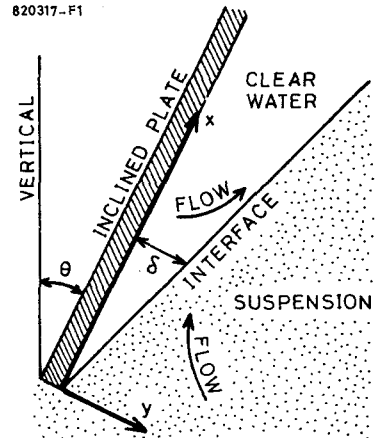


FIG. 1-DEFINITION SKETCH

3. 清澄層内流れの近似解

流れの支配方程式を解く際

に、困難な点は、偏微分方程式である事、非線形である事、2点境界値問題である事などである。まず、Blasius と同様の解析法により、Eg. 1 を常微分方程式とする。Eg. 15 で与えられ

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \text{-----(15), } u = u_0(x) f'(\eta) \text{-----(16)}$$

る相似変数 η を導入し、 u を Eg. 16 の様に仮定する。ただし、 $'$ は η による微分を表わす。このとき、Eg. 1 は Eg. 17 となる。

$$f'''(\eta) + \cos \theta = \alpha \cdot B \left\{ f'(\eta)^2 - \frac{3}{2} f(\eta) \cdot f''(\eta) \right\} \text{-----(17)}$$

$u_0(x)$, $\delta(x)$ は Egs. 18, 19 の様に表現される。B は無次元の未

$$u_0(x) = (2Bx)^{1/2} \text{-----(18), } \delta(x) = (2Bx)^{1/4} \text{-----(19)}$$

知数である。Eg. 17 は慣性項が粘性項や浮力項に比して小さい場合 ($\alpha \ll 1$) には、右辺を無視して、線形とし得る。しかし、流動条件によっては、 $\alpha = O(1)$ 程度となり、慣性項を考慮せねばならない。Eg. 17 の慣性項を無視した解を第1近似解 f_1 とし、 f_1 を Eg. 17 の右辺に代入して求めた解を第2近似解 f_2 、以下同

$$f_3(\eta) = f_2(\eta) + \Delta f_2(\eta) = f_1(\eta) + \Delta f_1(\eta) + \Delta f_2(\eta) \text{-----(20)}$$

様に $f_3 \dots$ とすると、 f_3 は Eg. 20 で与えられる。ただし、 f_1 , $\Delta f_1(\eta)$, $\Delta f_2(\eta)$ はそれぞれ、Egs. 21, 22, 23 の様になる。また、 $f_1(\eta) = \frac{1}{6} \cos \theta \cdot \eta^2 (3 - \eta) \text{-----(21)}$

$$\Delta f_1(\eta) = -\frac{1}{240} \alpha B_1 (\cos \theta)^2 \eta (10 - \eta^3) \text{-----(22)}$$

$$\Delta f_2(\eta) = -\frac{1}{16} \alpha B_2 (\cos \theta)^2 \eta^2 \left\{ \frac{1}{30} \alpha B_1 \cos \theta \left[-\frac{1}{3} (10 - \eta^3) - \frac{13}{336} (28 - \eta^4) + \frac{1}{168} (36 - \eta^6) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{720} (\alpha B_1 \cos \theta)^2 \left[\frac{1}{3} (10 - \eta^3) + \frac{13}{168} (28 - \eta^4) - \frac{1}{990} (55 - \eta^6) \right] \right\} \text{-----(23)}$$

v は Eg. 2 より、Eg. 24 で与えられる。未知数 B は Egs. 13, 19 それぞれの δ の平均値を等置すれば、Eg. 25 の様に求められる。

$$v = \frac{1}{4} (2B)^{3/4} x^{1/4} (\eta f' - 3f) \text{-----(24), } B = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{16} \right)^{1/4} \left\{ \frac{\sin \theta}{f(1)} \right\}^{1/4} \text{-----(25)}$$

4. 流動特性の計算例

Fig. 2 に u , v を η に対してプロットしてある。いずれの θ についても、 u は正で、 v は負である。従って流れは上昇し、傾斜板に向かう。Fig. 3 は $\delta \sim x$ の関係で、上昇するにつれ、清澄層が厚くなる事を示す。Figs. 4, 5 は、それぞれ、液界面速度 $\sim \theta$, $\delta \sim \theta$ の関係を示す。

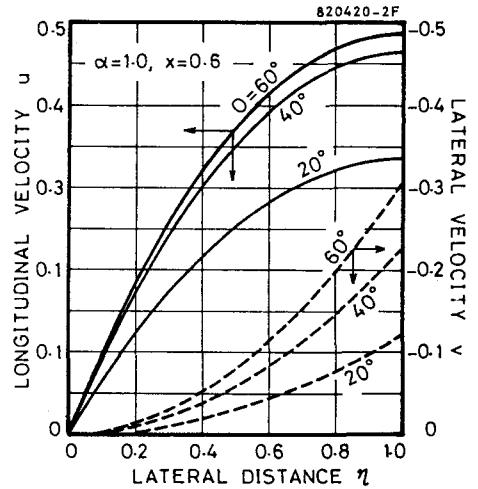


FIG. 2-VELOCITY PROFILE

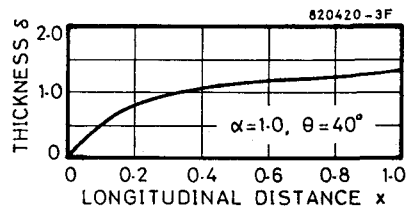


FIG. 3-CLEAR LAYER THICKNESS

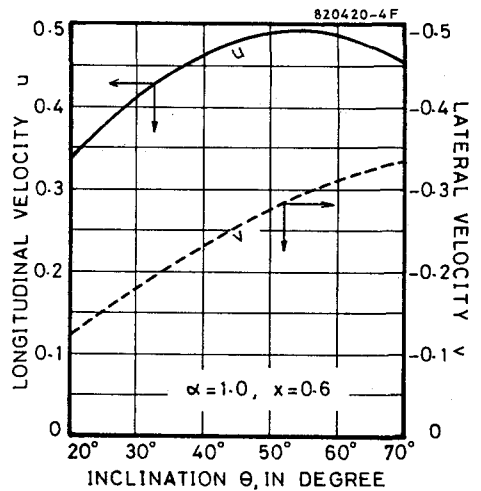


FIG. 4-INTERFACE u & v VS. θ

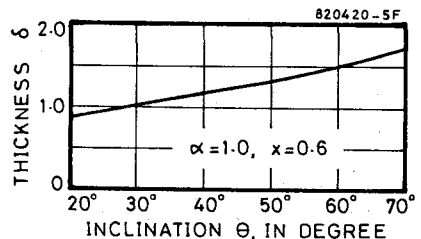


FIG. 5-THICKNESS δ VS. θ