

九州大学 工学部 正員 古賀 憲一
 同上 同上 栗谷 陽一
 同上 同上 楠田 哲也
 同上 学生員 島岡 隆行

1. まえがき 粒子の衝突頻度を与える理論式としては、一様剪断場における Camp の式、乱流拡散を基礎とする Levich の式や重力場（沈降速度差）での式などがある。これらの式は、いずれも剪断場あるいは重力場のみに限定されているため、重力と剪断の双方の効果によって粒子が衝突する現象に対しては適用が困難である。海域における微粒子の沈降現象、流動状態にある沈殿池内での除去機構などについて考察を加えるためには、重力と剪断の双方の効果による粒子の衝突合一現象を知ることは重要と考えられる。現在のところ、これら双方の効果を検討した衝突頻度を求める式は未だ得られておらず、実験的検討すら満足に進められていないようである。本研究は、任意の剪断速度場で重力沈降する粒子の衝突頻度について理論的考察を加えたものである。

2. 理論及び考察 任意剪断場中を重力沈降する粒子の衝突頻度式を得るに際しての仮定は次のとおりである。

- 1) 粒子は球とする。
 - 2) 粒子は重力及び剪断流によって移動し、粒子相互間の流体力学的干渉はないものとする。
- いま、2個の粒子に注目し、x, y, z 方向の粒子の相対速度成分を u, v, w とする。また、剪断流による流速ベクトルの向きを x 方向と平行にとる。その時の沈降速度（相対速度）ベクトルの向きを図-1 のようにとると、u, v, w は次式の如く表せる。

$$\left. \begin{aligned} u &= V_t + V_s \sin \theta \cos \phi \\ v &= V_s \sin \theta \sin \phi \\ w &= V_s \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ただし、 $V_t = G \eta$ で表せる剪断場での流体の速度
 η は粒子間距離の y 方向成分である。
 G は剪断速度、 V_s は相対沈降速度である。

つぎに、一方の粒子（b 粒子と称する）の中心を図-2 に示す座標の原点に一致させ固定し、他方の粒子（a 粒子と称する）の配置を図-2 に示すようにとると、(1)式で示される相対速度によって a 粒子が b 粒子に接近し、衝突することを考えれば、原理的に衝突頻度式が得られる。したがって、任意剪断場における沈降粒子の衝突頻度は、半径 $\frac{1}{2}(d_a + d_b)$ (d_a, d_b は a, b 粒子の粒径) なる仮想球に流入する流量 Q と粒子密度との積となる。その仮想球の半径方向の速度を v_r とすると、 Q は次式で与えられる。

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \int_{A, v_r|_{r=R} > 0} v_r dA \right\} \sin \theta d\theta d\phi \dots (2)$$

ただし、 $R = \frac{1}{2}(d_a + d_b)$ 、 dA は仮想球の微小面積、 $v_r|_{r=R}$ は仮想球表面における v_r である。

(2)式において、積分範囲 $\int_{A, v_r|_{r=R} > 0}$ の意味は、 $v_r|_{r=R} > 0$ を満足する場合についてのみ dA について積分することを意味する。一方、 $v_r|_{r=R}$ は、図-2 に示す座標系では次式の如く表される。

$$\begin{aligned} v_r|_{r=R} &= u \cos \varphi \sin \theta + v \sin \varphi \sin \theta + w \cos \theta \\ &= G R \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + V_s \{ \sin \theta \sin \theta \cos(\varphi - \Phi) + \cos \theta \cos \theta \} \end{aligned} \dots (3)$$

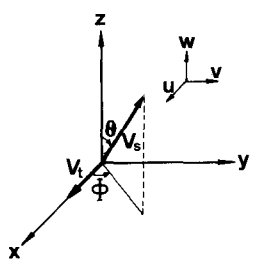


図-1. 速度ベクトル

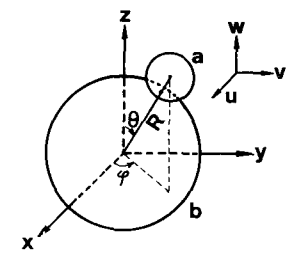


図-2. 粒子配置

ちなみに、(2)式において、 $V_s = 0$ の場合、すなわち剪断場のみでの衝突頻度を示す Q は、

$$Q = GR^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \sin \varphi \cos \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{8} G(da+db)^3 \quad \text{----- (4)}$$

となり、Campの提示した式と一致することが解る。また、 $G=0$ の場合については、計算を簡略化するために $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\Phi = 0$ として一般性は失われないので、

$$Q = V_s R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi = \frac{\pi}{4} (da+db)^2 V_s \quad \text{----- (5)}$$

となり、通常の求降による頻度式が得られる。(2)式は4重積分であり、かつ $v_r|_{r=R} > 0$ の条件下での積分を行わねばならないので、解析的な積分を得るのは困難である。したがって、本研究では数値積分によって解を得た。(2)式も数値積分する際に、通常のメッシュ法で積分すると $v_r|_{r=R} > 0$ となる領域を仮想球上で求めなければならず計算が繁雑となるため、ここでは中級程度の計算精度ではあるが簡単な計算方式を採用する意味でモンテカルロ法を用いた。計算結果を図-3に示す。縦軸は Q を $V_s R^2$ あるいは GR^3 で無次元化し、横軸は G, R, V_s の無次元量 GR/V_s で示している。この図において、 $G \rightarrow 0$ ($GR/V_s \rightarrow 0$) で $Q/V_s R^2 \rightarrow \pi$, また、 $V_s \rightarrow 0$ ($GR/V_s \rightarrow \infty$) で $Q/GR^3 \rightarrow 4/3$ となることと認められる。このことは、(4), (5)式と同等の結果である。つぎに、若干の推測により、この曲線の関数型を求めると、

$$Q = \sqrt{(\pi V_s R^2)^2 + (\frac{1}{3} GR^3)^2} \quad \text{----- (6)}$$

となるようであり、(6)式に基いて得られた結果を図-3に示している。この図から、(2)式の積分と(6)式との一致性は満足すべきものであることが解る。粒子を剛体粒子とみなし、沈降速度式はストークス式に従うものとして、無次元粒径 \tilde{d} を、 $\tilde{d} = \beta d/G$ (ただし、 $\beta = \frac{1}{18} \frac{\rho_p - \rho_w}{\mu}$)、無次元化 \tilde{Q} を、 $\tilde{Q} = Q/(G(da+db)^3/8)$ とすると(6)式は次の如く表せる。 $\tilde{Q} = \sqrt{\pi^2(\tilde{d}_a - \tilde{d}_b)^2/4 + (4/3)^2}$ ----- (7)

(7)式から、無次元量 \tilde{Q} は無次元化粒径差によって一義的に決められることが解る。また、(7)式で示される \tilde{Q} は $(\tilde{d}_a - \tilde{d}_b)$ の単調増加関数である。このことから、一つの特徴として均一分布に近い粒子群が緩い剪断流下の流体中で沈降するとき、粒子の衝突はまず流体の剪断作用によって促進され、若干でも分布に中が生じ始めると沈降速度差(粒径差)によって衝突がさらに促進されることが解る。(7)式は粒子を剛体とみなして導かれたものであるが、粒子がフロックの場合、(7)式で示した \tilde{Q} は原理的には沈降速度差で表現されるものであるため、(式の形は(7)式と異なる)同様のことがフロックの場合についても言える。ここで、示し得た例は、(6),(7)式からも解るように、重力と流体の剪断作用の双方の効果が同時に現れる場合に認められるものであり、実際の現象の一つとしては前述したように海域等で緩かな流動状態にある流体中に粒子が沈降する時には顕著に表れるものと思われる。

3. おわりに

本研究では、沈降と流体の剪断速度の双方の効果によって粒子が衝突する際の頻度式を求めたが、今後、粒子接近に伴う粒子間の流体力学的干渉を考慮した衝突効率について検討を進める必要があろう。また、工学的観点から、今回得られた結果をもとに実験的検討を進め数値モデルの確立を試み、以後の検討を進めたい。

参考文献

- 丸野, 栗谷, 榎田, 古賀 「剪断場における微粒子の沈降特性についての基礎的研究」 土木学会西部支部研究発表会 56年2月

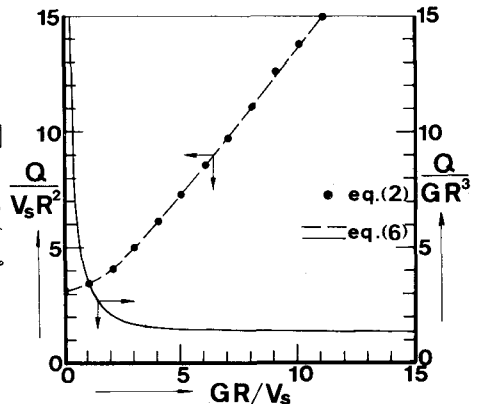


図-3. GR/V_s と $Q/V_s R^2$, Q/GR^3 の関係