

京都大学大学院 学生員 ○宇仁菅伸介
現・国立公害研究所 正会員 松岡 譲
京都大学工学部 正会員 住友 恒

1. はじめに 阻流板沈殿池におけるフロックをはじめとして、一般的な流れ場内の構造物周辺における浮遊粒子の挙動を明らかにするには、浮遊粒子の粒度、沈降、凝集などの効果を考慮して解析することが重要である。本研究では、流れ場として凹部をもった水路を想定し、基礎となる数式による記述から始めて、大型計算機を用いた数値解析により粒子の挙動を明らかにしようとした。

2. 粒子挙動の数値計算 まず凹部をもつ閉水路をいくつかの格子に分割する。その各格子点における流れ関数及び渦度を、反復計算により求める。流れを非圧縮性2次元定常流とすると、Navier-Stokesの運動方程式は、次のようになる。

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \quad \dots (1) \quad \rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \quad \dots (2)$$

ここに、 ρ : 流体の密度、 u, v : x, y 方向流速、 p : 圧力、 μ : 粘性係数 である。次に示す流れ関数 ψ 及び渦度 ω を定義し、連続の式とともに上の2式に代入し、さらに無次元化を行う。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots (3) \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}) \quad \dots (4)$$

以上より次式を得る。*印を付けたものが無次元量である。

$$\omega_* = -(\frac{\partial^2 \psi_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 \psi_*}{\partial y_*^2}) \quad \dots (5) \quad \frac{\partial^2 \psi_*}{\partial x_*^2} \frac{\partial^2 \psi_*}{\partial y_*^2} - \frac{\partial^2 \psi_*}{\partial x_*^2} \frac{\partial^2 \psi_*}{\partial y_*^2} = \frac{1}{Re} (\frac{\partial^2 \omega_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 \omega_*}{\partial y_*^2}) \quad \dots (6)$$

ここに、 $Re = \frac{VD}{\nu}$ で、 V : 平均流速、 D : 流路の幅、 ν : 粘性係数、である。(5)(6)両式を差分化する方法として、速度ベクトルの方向に応じて前進差分、後進差分でおきかえる風上差分法を用い、 ψ, ω を求める式を得る。これに適当な初期値を与え、反復計算により ψ 及び ω の値を全格子点について求めた。図1・2に ψ の等しい値を結んだ流線を、 Re の値を変えて計算結果の例として示す。なお、境界条件としては、流路の流入部及び流出部において層流状態での流れを仮定した。

次に、流れ関数の値を用い、(3)式を中央差分法により差分化することによって流速を水平方向と鉛直方向に分けて求めた。図3にこれらをベクトルで表示した結果を示す。求まった流速を用いて流れ場における粒子の速度を求めるには、次式を用いた。

$$\frac{d^3 p_p}{dt^3} \frac{du_p}{dt} = 3\pi\mu d(u - u_p) + \frac{d^3 p_p}{dt^3} (p_p - p_f) g \quad \dots (7)$$

$$\frac{d^3 p_p}{dt^3} \frac{dv_p}{dt} = 3\pi\mu d(v - v_p) \quad \dots (8)$$

ここで、 d : 粒子径、 u_p, v_p : 鉛直、水平方向粒子速度、 p_p, p_f : 粒子及び流体の密度、を表わす。定常な流れ場を仮定し、 $u_p \approx u, v_p \approx v$ と近似して $\frac{d^3 p_p}{dt^3} \approx u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ とおいて上式に代入し、中央差分法により差分化して u 及び v を求める式を得る。これより先述の ψ ,

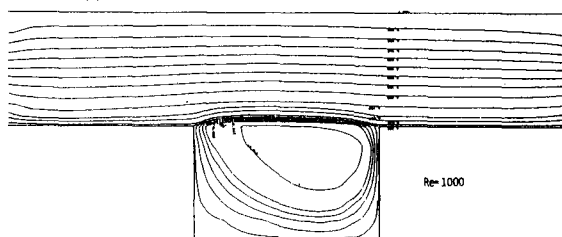


図1 数値計算より得た流線(1)

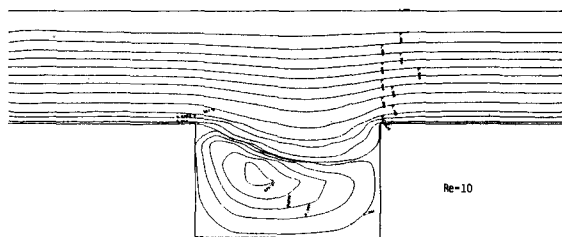


図2 数値計算より得た流線(2)

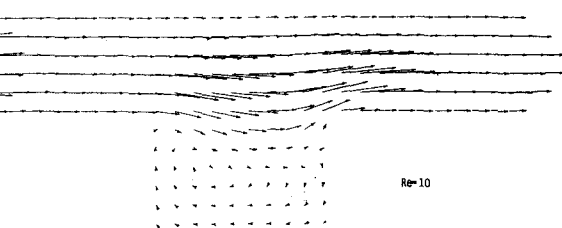


図3 数値計算より得た流速分布

w と同様に反復計算により、 u_p, v_p の値を得る。

3. フロック濃度変化の計算 以上で求めた粒子速度 u_p, v_p を用い、次に示すフロック濃度変化の式を解く。

$$\frac{\partial n}{\partial x} u_p + \frac{\partial n}{\partial y} v_p = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial n}{\partial y} + F(n) \quad (9)$$

ここに、 $n(w, x, y)$:フロック個数密度(個/cm²/gr)、 w :フロック濁質重量(gr)、 u_p, v_p :鉛直、水平方向のフロック流速、 D_x, D_y :鉛直、水平方向拡散係数、 $F(n)$:フロックの凝集に関する項である。(9)式を w について離散化するために、まず w 軸を $[w_1, w_2, \dots, w_m]$ で区分し、各区分間にて上式の両辺に $\int_{w_{l-1}}^{w_l} w dw$ ($l=2, 3, \dots, m$)を乗ずる。各区分間で $n(w) \cdot w$ を一定とし、 $n(w) \cdot w = Q_k / (w_k - w_{k-1})$ ($w_{k-1} \leq w \leq w_k$)とおくと次のような Q_k に関する式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} (Q_k u_k) + \frac{\partial}{\partial y} (Q_k v_k) = \frac{\partial}{\partial x} D_x \frac{\partial Q_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D_y \frac{\partial Q_k}{\partial y} + F(Q_k) \quad (10)$$

ここで、 $u_k = \int_{w_{k-1}}^{w_k} u_p dw / (w_k - w_{k-1})$, $v_k = \int_{w_{k-1}}^{w_k} v_p dw / (w_k - w_{k-1})$, $D_x = \int_{w_{k-1}}^{w_k} D_x dw / (w_k - w_{k-1})$, $D_y = \int_{w_{k-1}}^{w_k} D_y dw / (w_k - w_{k-1})$, $F(Q_k) = \int_{w_{k-1}}^{w_k} F(n) \cdot w dw$ である。実際の計算上では、簡単のため $[w_{k-1}, w_k]$ の区分内で u, v, D_x, D_y はいずれも一定とした。

(10)式を差分化する方法として、各格子点を中心とした長方形領域における濃度フラックスの保存式を考えた。格子点 (i, j) を中心とした領域でのフラックスの収支式は、次のようになる。但し、 $\Delta x, \Delta y$ は格子の幅を表わす。

$$\left\{ \frac{V_x + |V_x|}{2} Q_k(i, j-1) + \frac{V_x - |V_x|}{2} Q_k(i, j) \right\} \Delta x + \left\{ \frac{U_x + |U_x|}{2} Q_k(i-1, j) + \frac{U_x - |U_x|}{2} Q_k(i, j) \right\} \Delta y - \left\{ \frac{V_x + |V_x|}{2} Q_k(i, j) + \frac{V_x - |V_x|}{2} Q_k(i, j+1) \right\} \Delta x - \left\{ \frac{U_x + |U_x|}{2} Q_k(i, j) + \frac{U_x - |U_x|}{2} Q_k(i+1, j) \right\} \Delta y - D_x \frac{Q_k(i, j) - Q_k(i-1, j)}{\Delta x} \Delta y - D_y \frac{Q_k(i, j) - Q_k(i, j-1)}{\Delta y} \Delta x + D_x \frac{Q_k(i+1, j) - Q_k(i, j)}{\Delta x} \Delta y + D_y \frac{Q_k(i, j+1) - Q_k(i, j)}{\Delta y} \Delta x - F(Q_k) \Delta x \Delta y = 0 \quad (11)$$

ここで、 u, v は粒子速度を表わし、その添字は隣接する長方形領域を示している。上式を整理すると Q_k を求める式が得られる。次に、この Q_k の値を用いて次に示す式により凝集によるフロック濃度の変化量を求めた²⁾。但し、破壊による変化はここでは考えていない。

$$\frac{dn(w)}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^w K(w_1, w-w_1) n(w_1) n(w-w_1) dw_1 - \int_w^\infty K(w, w_1) n(w_1) n(w) dw_1 \quad (12)$$

ここで、 K は凝集定数である。先程と同様に、 w 軸に関して離散化を行ない Q_k を定義すれば、上式より Q_k のみの方程式を得る。ここで $w_k = 2w_{k-1}$ という条件を w 軸の区分に加えると、凝集定数がさらに簡単に表わせる。凝集定数としては次式を用いた³⁾。

$$K(x, y) = 0.1625 \left(\frac{G(x, y)}{\pi r_p^2} \right)^{3/2} r_p (w_1^{1/3} r_p + w_2^{1/3} r_p)^3 G \quad (13)$$

ここに、 r_p は有効密度関数のパラメータ、また $G = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right|$ とした。(13)式より求める $K(x, y)$ の値を(12)式を離散化した式に代入し、凝集によるフロック濃度変化量を求めた。式中の積分については、適応型シンアソソ法により値を算出した。

凝集による変化を考慮したフロック濃度 Q_k の計算方法をまとめると、次のようになる。まず(11)式において $F(Q_k) = 0$ とおき、 Q_k の初期として全格子点上において Q_k を求める。次に Q_k を用いて $\frac{dQ_k}{dt}$ の値を求める。この際、凝集による w 各区分間粒子の増減の総和は0になるよう留意した。つまり、 $\sum_k \frac{dQ_k(i, j)}{dt} = 0$ を常に満たすようにした。 $\frac{dQ_k(i, j)}{dt}$ の値が求めれば、これを(11)式の $F(Q_k)$ に代入して Q_k の新たな値を求める。以下これを繰り返し、近似誤差が十分小さくなったところで反復を完了する。以上のようにして求めた結果の例を図4~5に示す。図4は各格子点上の濃度の、図5は凝集量の等しい値をそれぞれ各粒径別に曲線で結んだものの一つである。

4. おわりに 上述の手法を実験により検証することも既に実施しているが、別の機会に報告する。

<参考文献> 1) 狩野武: 粉体粒子の挙動-理論と実際-、東京産業技術センター 2) 田中誠: 「フロック特性の経時変化に関する研究」京都大学大学院修士論文(1982) 3) 松岡譲, 田中誠, 住友恒: 「フロック特性の形成過程における経時変化の実験及び数値計算」京都大学環境衛生工学研究会第3回シンポジウム講演論文集(1981)

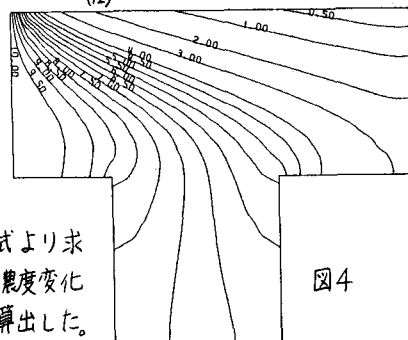


図4

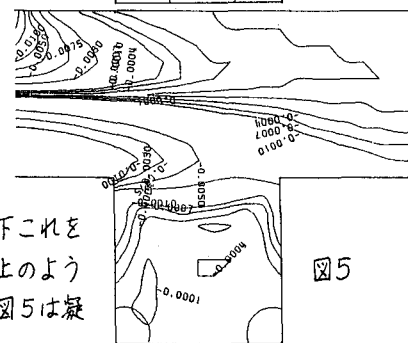


図5