

1. まえがき 耐震設計をする上で地震荷重の設定は大きな課題であるが、構造物の周波数特性を考慮できる点で応答スペクトルは優れている。設計用の応答スペクトルの設定については、信頼性設計を行うにあたり、確率論的な考察が必要である。そこで著者は、1自由度線形系のランダム応答に初通過破壊の考え方を導入し、応答スペクトルの確率分布が簡単な式で表せることを見出し、これを用いて得られた結果と建設省土木研究所の内容¹⁾とを比較し、応答スペクトルについて確率論的に考察を加えた。

2. 1自由度線形系のランダム応答についての数式の展開²⁾ 1自由度の線形運動方程式は、 $X(t)$ をランダム応答、 ζ を減衰比、 ω_0 を非減衰固有円振動数とすると、 $\ddot{X}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = W(t)$ (1) となる。ここで $W(t)$ はガウスホワイトノイズとする。または十分小さく、 $X(t)$ は定常で狭帯域ランダム過程であると仮定する。そうすると $X(t)$ と $\dot{X}(t)$ の結合確率密度はマルコフベクトル法で決定され、

$$P\{X\}\{\dot{X}\}(x, \dot{x}) = C \exp[-\zeta\omega_0/\pi K \cdot (\omega_0^2 x^2 + \dot{x}^2)] \quad (2) \quad \text{となる。ここで } K \text{ はホワイトノイズのスペクトル密度である。次に閾値 } \xi \text{ を正勾配で横断する期待横断数は}$$

$$E[N_+(\xi)] = \int_0^\infty \dot{x} P\{X\}\{\dot{X}\}(x, \dot{x}) d\dot{x} = C \cdot \pi K / 2\zeta\omega_0 \cdot \exp(-\zeta\omega_0^3/\pi K \cdot \xi^2) \quad (3)$$

となる。ここで、期待等価振動数は式(3)で $\xi=0$ とおいたもので近似でき、これは非減衰固有振動数と考えてよいことから $E[N_+(0)] = C \cdot \pi K / 2\zeta\omega_0 \approx \omega_0/2\pi$ (4) となり、 C が求まる。

すなわち $C \approx \zeta\omega_0^2/\pi^2 K$ (5) となる。

時間々隔 T 内において1回も $X(t)$ の絶対値が ξ を超過しない確率、すなわち、 $X(t)$ の絶対値の最大値が ξ 以下である確率 $P_0(\xi)$ (つまり応答スペクトルの確率分布関数) はポアソン過程の理論と式(5)より

$$P_0(\xi) = \exp(-2E[N_+(\xi)]T) = \exp[-\omega_0 T/\pi \cdot \exp(-\zeta\omega_0^3/\pi K \cdot \xi^2)] \quad (6)$$

となり、式(6)から逆に ξ を求めると次式となる。

$$\xi = \sqrt{-\pi K / \zeta\omega_0^3 \cdot \ln(-\pi \ln P_0 / \omega_0 T)} \quad (7)$$

式(6)を求める時にはポアソン分布を用いた。これは閾値横断の発生が独立事象であるという勝手な仮定をしたことである。この仮定は特に減衰の小さい振動系の応答のような狭帯域ランダム過程にたいしては受け入れがたい。そこで包絡線分布を考え、包絡線の閾値横断を独立事象として取り扱うこととする。

狭帯域ランダム過程が $X(t) = A(t) \cdot \cos[\omega_m t + \theta(t)]$ (8) で表されると仮定する。

ここで ω_m は狭帯域のなかの代表的な周波数、 $A(t)$ および $\theta(t)$ は t に関して $X(t)$ より非常にゆっくり変化する定常ランダム過程である。なお $A(t)$ は非負であると仮定する。こうすると包絡線 $A(t)$ の確率分布関数は

$$F_{\{A\}}(a) = 1 - \exp(-a^2/2\sigma^2) \quad (9) \quad \text{となる。また } A(t) \text{ と } \dot{A}(t) \text{ の結合確率}$$

密度は $p_{\{A\}\{\dot{A}\}}(a, \dot{a}) = a/(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma^2 \sigma_1 \cdot \exp(-a^2/2\sigma^2 - \dot{a}^2/2\sigma_1^2)$ (10) となる。次に $A(t)$ が閾値 ξ を正勾配で横断する期待横断数は次式となる。 $E[N_+(\xi)] = \sigma_1 \xi / (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma^2 \cdot \exp(-\xi^2/2\sigma^2)$ (11)

時間々隔 T 内において、 $A(t)$ が一度も ξ を正勾配で切らない確率 $P_{0A}^+(\xi)$ はポアソン過程の理論により次式となる。 $P_{0A}^+(\xi) = \exp(-E[N_+(\xi)]T) = \exp[-\sigma_1 T \xi / (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma^2 \cdot \exp(-\xi^2/2\sigma^2)]$ (12)

$A(t)$ が T 時間内に ξ を超えない確率は、初期値 ($t=0$ における値) が ξ より小さくかつ T 時間内において ξ を正勾配で切らない確率であり、また負の領域についても対称であることを考慮すると、包絡線の絶対値が ξ を超えない確率は次式となる。

$$P_{0A}(\xi) = [F_{\{A\}}(\xi) \cdot P_{0A}^+(\xi)]^2 \\ = [1 - \exp(-\xi^2/2\sigma^2)]^2 \cdot \exp[-2\sigma_1 T \xi / (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma^2 \cdot \exp(-\xi^2/2\sigma^2)] \quad (13)$$

なお、式(9)~(13)で用いた $\sigma^2 = (\sigma_X^2)$, $\sigma_1^2 = (\sigma_{\dot{X}}^2 - \omega_m^2 \sigma_X^2)$ は、 $\pm\omega_0$ に中心をもつ2つの方形でスペクトル密度を置きかえることにより次式で表

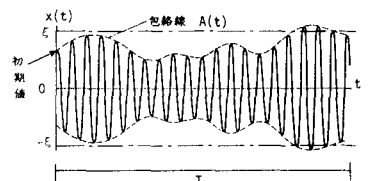


図1 狭帯域ランダム過程

現できる。またこのような置きかえにより、

$\omega_m = \omega_0$ を用いることが可能になる。
 $\sigma^2 = \pi K / 2\zeta\omega_0^3, \quad \sigma_1^2 = \pi^3 K \zeta / 24\omega_0^4 \quad (14)$

3. スペクトル密度と継続時間の決定

$X(t)$ が狭帯域ランダム過程であることを考慮すると、 K はホワイトノイズのスペクトル密度と仮定されているが、 ω_0 の付近で徐々に変化する広帯域のものについても、 ω_0 近傍で一定値であるとの仮定をおくことにより上述の式は近似的に成立すると考えられる。そこで、スペクトル密度 $K(T_0)$ [ここで、 $T_0 = 2\pi/\omega_0$] はフーリエスペクトルの絶対値 $FS(T_0)$ と $K(T_0) = FS^2(T_0)/2\pi T$ (15) の関係があることと、アメリカの過去の地震のデータにもとづいて $FS(T_0)$ を、マグニチュード M 、震央距離 Δ 、地盤条件 Y_s から求める式

$FS(T_0) = \exp(b_1 + b_2 M + b_4 Y_s) \Delta^{b_3} \quad (16)$

が McGuire により与えられていることから求めることができる。なお、 $b_1 \sim b_4$ の係数は表形式で与えられている。

次に地震動の継続時間 T については、強震動と等価な様な強さのホワイトノイズの継続時間として与えられている Esteva の式⁴⁾ $T = 0.02 \exp(0.74M) + 0.3 \Delta$ (17) を使用した。

4. 計算結果 図2は上述の方法、すなわち M, Δ, Y_s を定め、式(16)、(17)、(15)を計算した後、式(7)および式(13)から求めた ξ を ω_0^2 倍したものを T_0 に対してプロットしたものである。なお式(13)については二分割法を用いて解いた。また建設省土木研究所の値も比較のために同時にプロットした。ここでは、建設省土研のものと条件を合わせるために、 $\zeta = 0.05$; $P_0 = P_{0A} = 0.5$ とし、 M, Δ は各カテゴリーの平均値を用いた。また $FS(T_0) = FS(1.0)$ として一定値とした場合も同時に示した。式(18)を用いたものと建設省土研のものと各カテゴリーにおいて比較的良い近似を示すことがわかる。

図3は $T_0 = 0.6$ 秒において、確率密度関数 $p_0(\xi) = [dP_0(\xi)/d\xi]$ とカテゴリー内での M と Δ の変化に伴うばらつきを平均化した確率密度関数 $p_{0,ave}(\xi)$ [作図にあたっては両者をカテゴリー ($7.5 \leq M \leq 7.9, 20 \leq \Delta < 60\text{km}$, 2種地盤) 内の ξ の平均値で正規化した] および建設省土研の $S_{A1}/\bar{S}_{A1}$ の確率密度関数を同時にプロットしたものである。この図から同一カテゴリー内においても M と Δ により確率密度関数が大きく変化することがわかる

図4は式(6)より求めた応答スペクトルの等確率線を示す。

5. あとがき 応答スペクトルについての確率分布を M, Δ, ζ, T_0 等の簡単な関数〔式(6)、(13)〕として表現する手法を示した。今後、式(16)、(17)の改善により、信頼性設計への応用が期待できる。

参考文献 1) 建設省土木研究所：「耐震技術に関する研究開発報告書」，p. 132-145，昭和52年3月 4) 土木学会：構造物の安全性・信頼性，p. 101-116，昭和51年
2) Lin, Y. K.: PROBABILISTIC THEORY OF STRUCTURAL DYNAMICS, McGraw-Hill, 1967
3) McGuire, R. K.: A SIMPLE MODEL -, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 68, No. 3, p. 803-822, June, 1978

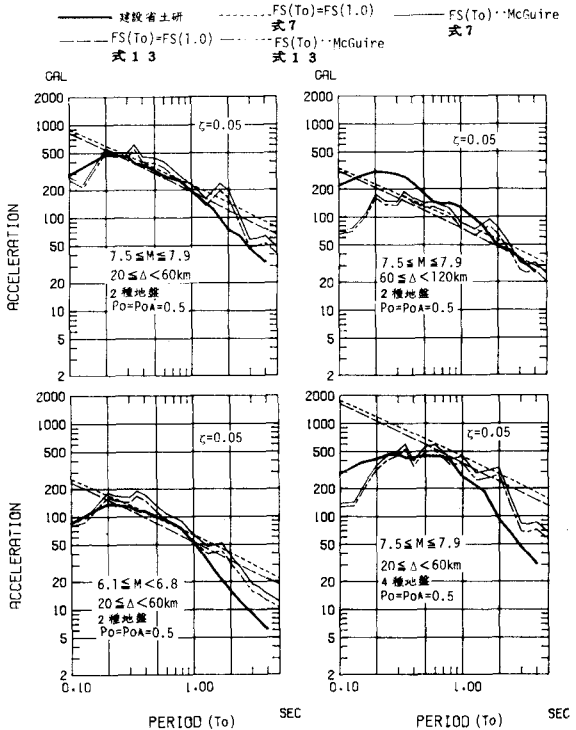


図2 平均応答スペクトルの比較

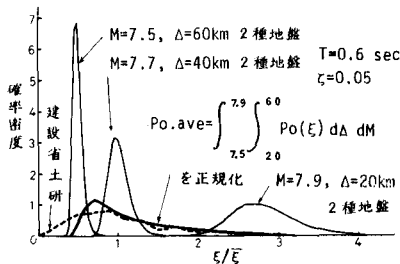


図3 確率密度関数の比較

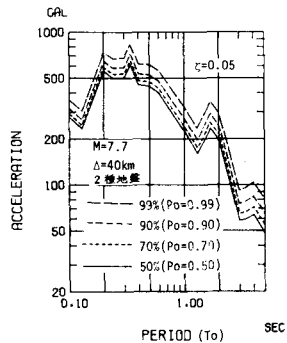


図4 等確率応答スペクトル