

専修大学短期大学 正員 三上 敬司
北海道大学 正員 能町 純雄
室蘭工業大学 正員 松岡 健一

1. まえがき

半無限弾性体への圧入問題は、Love, 宮本博¹⁾によって研究がなされている。宮本は、半無限体の平面境界を剛体で押した場合に半無限体内に生ずる応力分布と圧縮される面積の領域を仮定して円柱に加える全圧力を求めている。本論文は、宮本が求めているバネ定数を振動方程式に適用して圧入衝撃力を求め、そして、半無限弾性体の動的応答問題より、変位と力の関係によって求められる複素コンプライアンスを用いて、半無限弾性体への平底円柱の圧入衝撃力を求め、比較検討してみた。

2. 解析方法

図-1に示したように、半無限弾性体上の重さのない剛な半径 r_0 の円板に鉛直振動荷重を作用させた場合の解析は、半径方向を r 、接線方向を θ 、軸方向を z として、それぞれの方向の変位成分を u , v , w とし、円柱座標で表わされる三次元運動方程式からフーリエ・ハンケル変換を施して z 方向の応力 σ_z を求めると、

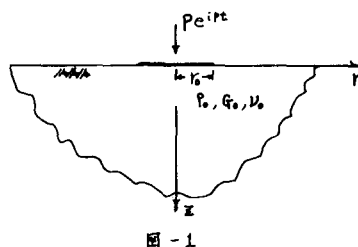


図-1

$$\mathcal{J}_m \mathcal{C}_m[\sigma_z] = -\frac{2G_0\beta}{\rho_0\beta^2} \left\{ \xi^2 - \frac{\rho_0\beta^2}{2G_0} - \alpha\beta \right\} \mathcal{J}_{m-1}[T_{mz}^B] + \frac{G_0^2}{\rho_0\beta^2} \left\{ 4\alpha\beta\xi^2 - (2\xi^2 - \frac{\rho_0\beta^2}{G_0})^2 \right\} \mathcal{J}_m \mathcal{C}_m[w_0] \quad (1)$$

鉛直方向に $Pe^{i\omega t}$ の荷重が作用した場合の地盤の応力分布は、弾性接触問題より

$$\sigma_z = \begin{cases} \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi r_0 (r_0^2 - r^2)^{1/2}} & \text{for } r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases} \quad (2) \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{J}_m[1], \mathcal{J}_{m-1}[1] : \text{Bessel変換記号} \\ \mathcal{C}_m[1] : \text{Fourier変換記号} \end{array} \right\}$$

境界条件として、地表面上にはせん断力が生じていないから、 $T_{mz}^B = 0$ となり、(2)式を(1)式に適用して、逆変換を施して、 z 方向の地表面の変位 w_0 を求めると、

$$w_0 = \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_0\beta^2}{G_0^2 \{ 4\alpha\beta\xi^2 - (2\xi^2 - \frac{\rho_0\beta^2}{G_0})^2 \}} \cdot \frac{\sin r_0\xi}{r_0\xi} \xi J_1(r\xi) d\xi \cdot \cos\theta \quad (3)$$

式(3)より、一般化されたウェイトをつけて、鉛直方向の平均変位 w_a を求めると、

$$w_a = \int_0^{r_0} \frac{r w_0}{r_0 (r_0^2 - r^2)^{1/2}} dr = \frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_0\beta^2}{G_0^2 \{ 4\alpha\beta\xi^2 - (2\xi^2 - \frac{\rho_0\beta^2}{G_0})^2 \}} \cdot \left(\frac{\sin r_0\xi}{r_0\xi} \right)^2 \xi d\xi \quad (4)$$

(4)式より、変位と力の関係式は、次のように表わすと、

$$w_a = C_{vv} \cdot P \quad \text{ここで} \quad C_{vv} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_0\beta^2}{G_0^2 \{ 4\alpha\beta\xi^2 - (2\xi^2 - \frac{\rho_0\beta^2}{G_0})^2 \}} \cdot \left(\frac{\sin r_0\xi}{r_0\xi} \right)^2 \xi d\xi \quad (5)$$

C_{vv} は、鉛直振動荷重による複素コンプライアンスである。

ρ : 円振動数, ρ_0 : 密度, G_0, λ_0 : Laméの弾性係数, $\alpha^2 = \xi^2 - \frac{\rho_0\beta^2}{G_0}$, $\beta^2 = \xi^2 - \frac{\rho_0\beta^2}{2G_0 + \lambda_0}$

図-2のように、質量 M 、半径 r_0 、高さ l をもつ平底円柱を高さ $h = \frac{U_0^2}{2g}$ のところから速度 U_0 で落下させた場合の圧入衝撃力を求めるには、(5)式を用いて、 z 方向の変位と圧入衝撃力との関係式は、次のようになる。

$$w_a = C_{vv} \cdot V_p \quad (6)$$

平底円柱の運動方程式は、

$$M \frac{\partial^2 w_a}{\partial t^2} = -V_p \quad (7)$$

(7)式を時間 t について積分すると、

$$M \int_0^\infty \frac{\partial^2 w_a}{\partial t^2} e^{-it} dt = - \int_0^\infty V_p e^{-it} dt \quad (8)$$

(8)式を解いて、逆変換して、圧入衝撃力を V_p と求めると、

$$V_p = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{M U_0}{1 - M^2 C_{VV}^R} e^{it} dp \quad (9) \quad \text{ここで、} C_{VV}^R \text{ は複素コンプライアンスの実数部である。}$$

(9)式を留数積分し、第1項が卓越しているのを、次式となる。

$$V_p = M U_0 p_i \sin p_i t_i \quad (10)$$

衝撃作用時間 t_i の間の衝撃力の最大値 $V_{p \max}$ は、

$$V_{p \max} = M U_0 p_i \quad (11)$$

次に、宮本博著の三次元弾性論より、円柱底の変位 δ にするために円柱に加える全荷重 P とすると、同じ条件での衝撃の運動方程式は、次のようになる。

$$M \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + P = 0 \quad (12) \quad \text{ここで } P = k \delta$$

バネ係数 $k = \frac{4 G_0}{1 - \nu_0}$

(12)式を解いて 衝撃力の最大値 $V_{p \max}'$ は、

$$V_{p \max}' = \sqrt{MK} U_0 \quad (13)$$

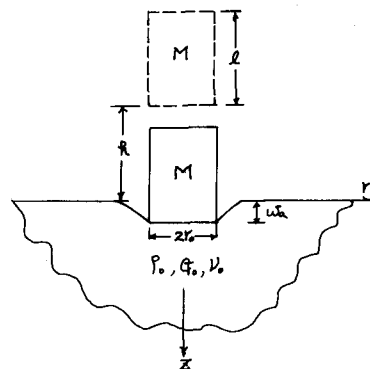


図-2

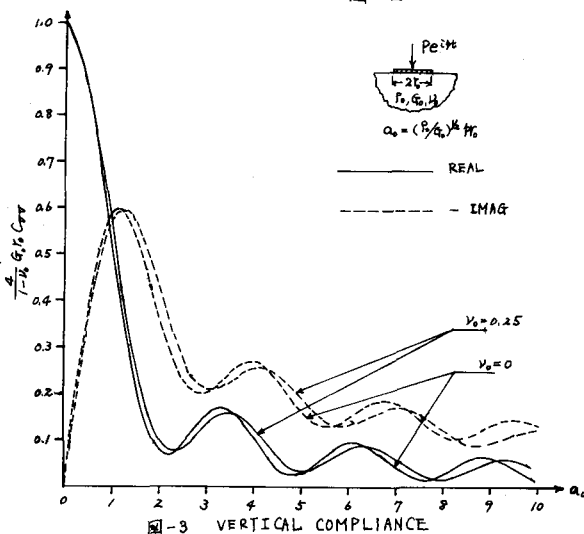


図-3 VERTICAL COMPLIANCE

3. 数値計算

数値計算例として ポアソン比 $\nu = 0, 1/4$ とした場合の無次元円振動数 $\alpha_0 = (p_0/q_0)^{1/2}$ に対する鉛直力による複素コンプライアンスを図-3に示した。この図を使って、 $C_{VV}^R = \frac{1}{M p_i^2}$ となる(9)式の留数値を求める。

ポアソン比 $\nu = 0, \frac{r_0}{r_0} = 3$ のとき、 p_0 を 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 と変化した場合の p_i を 図-3 より求め、 $r_0 = 0.3 \text{ m}$ 、弾性体のせん断速度 $C_0 = 300 \text{ m/sec}$ 、円柱の単位体積重量 $W = 2.4 \text{ t/m}^3$ 、 $U_0 = 6 \text{ m/sec}$ とした場合の $V_{p \max}$ と $V_{p \max}'$ を 図-4 に示した。図-4 のように、 $p_0/r_0 \geq 1$ の場合は、 $V_{p \max}/V_{p \max}' \approx 2$ である。 $p_0 < 1$ の場合は、 $V_{p \max}$ が $V_{p \max}'$ より比して非常に大きな値となる。

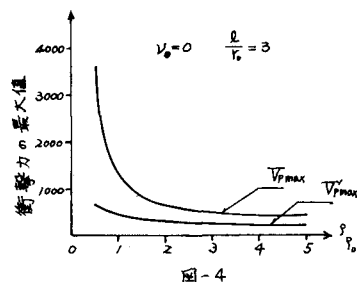


図-4

4. 結 び

以上の結果より、複素コンプライアンスを用いて求めた衝撃力と静的バネ定数を用いて求めた衝撃力とは、かなりの差があることがわかった。よって、この種の問題は、動的問題を取り扱った複素コンプライアンスを求めそれを用いて、衝撃力を求めなければならぬ。これらの値は、実際問題とは多少異なるが、各種ハンマーの衝撃力に関する一応の目安となる。

5. 参考文献

- 1) 宮本博: 三次元弾性論
- 2) J.E. Luco etc.: Dynamic response of circular footing
- 3) 土と構造物の動的相互作用: 土壌工学