I-264　半無限弾性体の軸対称ダイナミックコンプライアンス問題のGreen関数の研究

埼玉大学工学部　正員　　東原　紘道
埼玉県土木部　　正員　◦山田　隆弘

1. はじめに

地盤は構造物を支持している一方、地震動などの波動を伝える媒体でもある。そこで、構造物の動的設計を行なう場合、地盤と構造物が接していることによって生じる影響、すなわち相互作用効果を評価することは大切である。動的な場合を考える時、その解析方法の基本として地表面の点加振に対する任意点での変位を求めなければならない。しかし、この解は特異点をもつ無限積分の形で与えられ、解析的に解くことができない。Lamb[1]はこの積分値を複素関数論を用いて有限積分と留数計算に分けて求めた。田治見[2]も同様の手法で妹沢[3]の一般解から数値解を得ている。Reissner[4]は、円形基礎に対して地表面での接触圧分布を仮定し振動問題を解いた。また、接触圧を仮定しない方法としては、Luco[5]らのFredholm型積分方程式を解く方法や小林[6]、桜井[7]ら接触面を分割し、Green関数の離散化手法を用いる方法がある。接触面を分割すると任意の形状の基礎に対して適用する利点がある。これらは、数学的には、偏微分方程式の応力 - 変位混合境界値問題を解いていることになる。本研究は、貯油タンクを想定し、円形基礎の場合に効果的に適用できる有限積分で表示された形でGreen関数を求め、相互作用効果の解析に応用することを目的とする。

2. 解析方法

本研究は、地盤を半無限弾性体と仮定し、上下方向加振に対する同方向変位（軸対称）について考える。妹沢によれば、原点に単位上下加振力 e^{ipt} が作用すると、その時の距離 r での直応力 $\sigma_z(r)$ と、上下方向変位 $\omega(r)$ は次のようになる。

$$\sigma_z(r) = Z \cdot J_0(kr)\, e^{ipt} \tag{1}$$

$$\omega(r) = -\frac{Z}{\mu}\frac{k_\beta^2\sqrt{k^2-k_\alpha^2}}{F(k)}J_0(kr)\,e^{ipt} \tag{2}$$

※ $$F(k) = (k^2+k_\beta^2) - 4k^2\sqrt{k^2-k_\alpha^2}\sqrt{k^2-k_\beta^2} \tag{3}$$

$k_\alpha = P/V_P$　　$k_\beta = P/V_S$　　μ；剛性率　　$J_0(x)$；0次のBessel関数

ここで、Fourier・Bessel積分により次式が得られる。

$$W(r,s) = -\frac{k_\beta^2}{\mu}\int_0^\infty \frac{k\sqrt{k^2-k_\alpha^2}}{F(k)}J_0(kr)J_0(ks)\,dk \tag{4}$$

東原[8]によれば(4)式は、次のように有限積分に変換される。

$$W(r,s) = -\frac{k_\beta^2}{\mu}W_0(r,s) \tag{5}$$

$$W_0(r,s) = \int_0^{k_\beta} K(k)H_0(k;r,s)\,dk - \pi\frac{\chi\sqrt{\chi^2-k_\alpha^2}}{F'(\chi)}H_0(\chi;r,s) \tag{6}$$

※ $$K(k) = \begin{cases} \dfrac{k\sqrt{k_\alpha^2-k^2}}{(2k^2-k_\beta^2)^2+4k^2\sqrt{k_\alpha^2-k^2}\sqrt{k_\beta^2-k^2}} & 0 \leqq k \leqq k_\alpha \\[2ex] \dfrac{4k^3\sqrt{k_\beta^2-k^2}\,(k^2-k_\alpha^2)}{(2k^2-k_\beta^2)^4+16k^4\,k^2-k_\alpha^2\,k_\beta^2-k^2} & k_\alpha < k \leqq k_\beta \end{cases} \tag{7}$$

$$H_0(k;r,s) = \frac{1}{2}G_0(k;r,s) + iJ_0(kr)J_0(ks) \tag{8}$$

$G_0(k;r,S)$ … $J_0(x)$に類似した性質をもつ関数で2重数値積分として与えられる。

K … k_α, k_βによって決まる留数部分に関係する定数。

なお、(5)式の$W(r,S)$は、原点から距離Sの点に上下加振が加わった時に、距離rの点に生じる上下方向変位である。この$W(r,S)$を用いると、地表面に分布応力$\sigma_z(S)$が加えられた時の変位$\omega(r)$は、次のように表わされる。

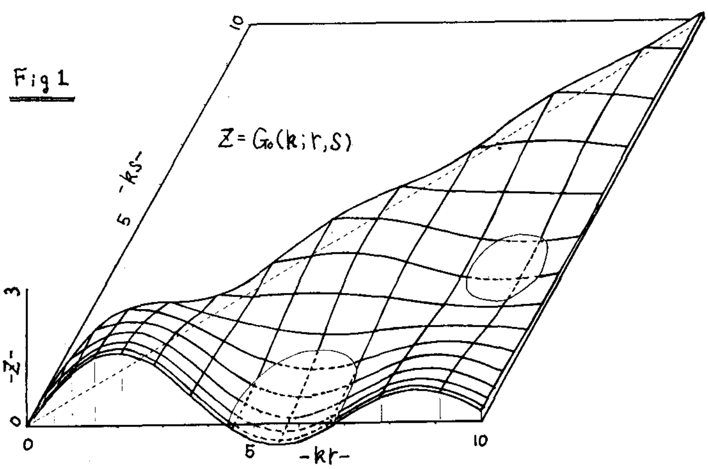
$$\omega(r)=\int_0^\infty S\,\sigma_z(S)\,W(r,S)\,dS \qquad (9)$$

また、$S\to 0$とすると $H_0(k;r,S)\to iH_0(-kr)$ となり(5)式は 小林[9]の示した原点載荷の場合の解に一致する。

$$* \quad H_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix\theta}\,d\theta \qquad (10)$$

3. 数値計算の結果

(5)式の積分値を得るには、式中の(8)式の積分を計算しなければならない。所要時間の大部分は(8)式の数値計算で費やされる。2重積分$G_0(k;r,S)$を実際に数値積分するとFig 1のような形状を示す。無限積分表示の場合、特異点があるが、今回の式は、特異点がなく計算上便利である。また、積分区間が、0からk_βまでと非常に短いので、短時間で高精度の解が得られる利点がある。なお本研究ではふれなかったが今回のGreen関数は、水平、ロッキング振動等、任意の加振に対しても適用が可能である。これらの理由から今回求めたGreen関数は実用上かなり有効であると思われる。なおGreen関数(5)式および、他の数値計算の結果については、講演当日に発表する予定である。



※参考文献

1) Horece Lamb:「On the Propagation of Tremors over the surface of an Elastic Solid」Philosophical Transaction of the Royal Societiy, London, Series A, vol 203, 1904

2) 田治見宏:「耐震理論に関する基礎的研究」東大生産技術研究所報告. 第8巻第4号. 1959

3) 妹沢克惟:「Further Studies on Rayleigh-waves having Some Azimuthal Distribution」東大地震研集報第6号

4) Reissner. E. and Sagoci. H. F.:「Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half Space」Journal of Applied Physics. vol 5, No 9. 1944

5) Juan E. Luco, Russell, A. Westmann:「Dynamic Response of Circular Footings」Journal of the Engineering Mechanics Division. 1971

6) 武藤清・小林俊夫・中原光春他:「Green関数の離散化手法を用いた地盤－建物の動的相互作用プログラム(SOILAN)」建築学会. 第2回電算機利用シンポジウム. 1980

7) 桜井春輔・北村泰時:「剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法」土木学会論文報告集第209号. 1979

8) 東原:「半無限弾性体のダイナミックコンプライアンス問題のGreen関数の研究」埼玉大学工学部建設系研究報告 Vol 12 (投稿中)

9) 小林俊夫:「半無限弾性体地表面点加振解の無限積分を有限積分で表わす方法」建築学会論文報告集第302号1981