

京都大学防災研究所

佐藤忠信

京都大学防災研究所

土岐恵三

佐藤工業

日野 徹

1. まえがき

地震時における構造物や地盤の応答を解析する際には、系の挙動を支配する常微分方程式を解かねばならない。一般に、任意の非定常入力に対する応答解析では、時間領域における直接数値積分法が用いられる。数値積分法は、従来から多くの方法が考へられ、改善が進められてきたが、その誤差評価法に関しては明確な規範がない。そこで新しい誤差評価法を提案し、既存の数値積分法の誤差評価を行う。さらに新しく数値積分法を開発し、その有効性について検討を加える。

2. Z変換を用いた数値積分法の誤差評価

一般の振動系に現れる運動方程式を状態方程式の形で表現すれば次式となる。

$$\dot{X} = AX + f, \quad X = \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 y, g, M, C, K はそれぞれ、変位ベクトル、外力ベクトル、質量マトリックス、粘性係数マトリックス、剛性マトリックスであり、 $(\cdot) = d(\cdot)/dt$ を表わしている。式(1)を時間領域に関して離散化するにより、数値積分のための漸化式を誘導する。時刻 $n\tau$ と時刻 $(n+1)\tau$ の間で外力は線形に変化するとすれば、式(1)は積分でき次式のようになる。

$$X_{n+1} = e^{A\tau} X_n + (e^{A\tau} - I)A^{-1}f_{n+1} + [e^{A\tau} - (e^{A\tau} - I)A^{-1}]A^{-1}(f_n - f_{n+1})/\tau \quad (2)$$

ここに、 I は単位マトリックス、変数に付けた添字 $n, n+1$ は各々時刻 $n\tau, (n+1)\tau$ における変数を意味する。

式(2)の形式は、適当な変換行列を用いることにより、一般性を失うことなくスカラー変数に対しても成立させることができる。この場合 $e^{A\tau}$ は A の固有値 μ を用いて $e^{\mu\tau}$ なるスカラー量へ変換される。さらに、スカラー量で表現された式(2)を Z 変換することにより次式となる。

$$(Z - e^{\mu\tau})X(Z) = [Z(e^{\mu\tau} - 1)/\mu + (1 - Z)\{e^{\mu\tau} - (e^{\mu\tau} - 1)/\mu\}/\mu\tau]F(Z) \quad (3)$$

ここに、 $X(Z)$ と $F(Z)$ は各々時系列 X_n と f_n に関する Z 変換形である。式(3)の左辺の係数をゼロとする Z の値 $e^{\mu\tau}$ は式(1)で与えられる微分方程式を差分方程式に変換する写像関数になっている。既往の数値積分法は式(1)に現れる $e^{A\tau}$ を関数 $E(A\tau)$ で近似することにより、常微分方程式を差分方程式に変換したものと見ることが出来る。これは、固有値空間で見れば、 $e^{\mu\tau}$ を $E(\mu\tau)$ で近似することと等価である。 $Z = e^{\mu\tau}$ は厳密解であるから、 $Z \equiv E(\mu\tau)$ とおいた場合には、 $\mu\tau$ 平面から Z 平面への写像が厳密解の写像が与えられるゆえに評価すれば、数値積分法の精度を調べることも出来る。そこで次式のような誤差を定義する。

$$\begin{aligned} \text{ゲイン誤差}(\%) &= | |E(\mu\tau)| - \exp(\sigma\tau) | / \exp(\sigma\tau) \times 100 \\ \text{位相誤差}(\%) &= | \angle E(\mu\tau) - \omega\tau | / \omega\tau \times 100 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $|E|$ と $\angle E$ は E の絶対値と偏角を表わしている。式(4)に現れる σ, ω はマトリックス A の固有値の実数部と虚数部に対応し $\mu = \sigma + i\omega$ と表わされる。いま ω_0, β_0 を系の固有円振動数、減衰定数とすれば $\sigma = -\omega_0\beta_0$, $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \beta_0^2}$ とする。

$\mu\tau$ 平面を適当な大きさの網目に分劃し、その格子点上に於けるゲイン誤差、位相誤差を式(4)に従って計

算し、誤差の等高線を
描いた一例が図-1であ
る。これは、よく使用
されている Newmark β 法
で $\beta=1/6$ とした場合の
ものである。図が示
すように、ゲイン
誤差と位相誤差はか
なり異なった分布を
示すことがわかる。
このように、両者の誤
差がある一定の値以
内に

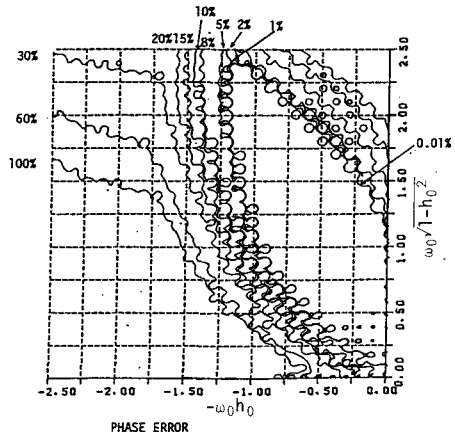
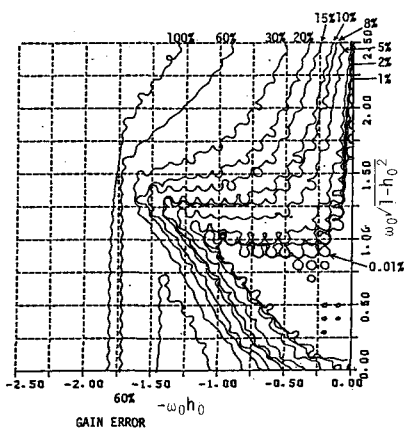


図-1 Newmarkの β 法におけるゲイン誤差と位相誤差 ($\beta=1/6$)

なる領域をもって既
往の数値積分法の誤
差評価を行、たのが
図-2 である。ゲイン
と位相の位相誤差が
同時に1%以下に
なる領域が示され
ている。図中にはこ
こで提案する数値積
分法の誤差領域も同
時に示してある。New
markの β 法は比較
的に広い範囲で高い
精度を保つことがわ
かる。Houbolt法、
Wilson θ 法は他の
方法に比べ精度はか
なり劣っている。
Runge-Kutta法の
精度は非常に高いが
高次数に依りてマト
リックスAのベキ乗
計算が必要のため、
実用的ではない。
既往の数値積分法
ではPC法に比べ精
度が最も高い。

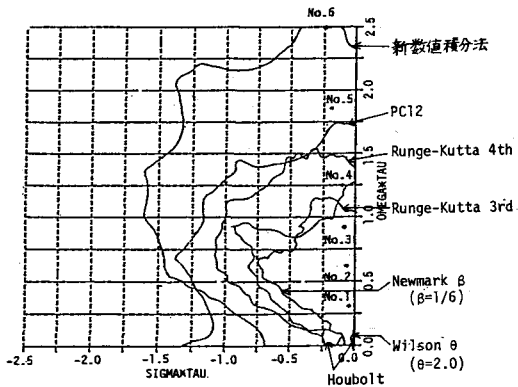


図-2 既往の数値積分法の誤差評価

3. 新数値積分法の提案

一般化された Padé 近似の概念を複素数領域に拡大解釈し、 e^{At} を近似する。提案する近似式は次式で与えられる。

$$e^{At} = \frac{I + (\frac{1}{2} - \frac{\alpha_1}{6} + \frac{\alpha_2}{12})At + (\frac{1}{12}(1 - \alpha_1 - \alpha_2))A^2t^2}{I - (\frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{6} + \frac{\alpha_2}{12})At + (\frac{1}{12}(1 + \alpha_1 + 5\alpha_2))A^2t^2} \quad (5)$$

$$\alpha_1 = 0.14247 - 0.26335i$$

$$\alpha_2 = -0.018134 - 0.011434i$$

この近似式を用いた差分式は次式のようになる。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2} \dot{y}_{n+1}$$

$$\ddot{y}_{n+1} = (M \frac{\beta_1}{\tau} + C + \frac{\tau}{\beta_2} K)^{-1} (M \frac{\beta_1}{\tau} \ddot{y}_{n+1} - K y_{n+1} + M g_n), \quad \ddot{y}_{n+1} = \frac{\beta_1}{\tau} (\dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n)$$

$$y_{n+1} = (M \frac{\beta_1}{\tau} + C + \frac{\tau}{\beta_1} K)^{-1} \{ (\frac{\tau}{\beta_1} M + C + \frac{\tau}{\beta_1} K) y_n + M (1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}) \ddot{y}_n + M (-\frac{\tau}{\beta_2} + \frac{\tau}{2}) \dot{y}_{n+1} + M (\frac{\tau}{\beta_2} + \frac{\tau}{2}) \dot{y}_n \}$$

$$\dot{y}_{n+1} = (M \frac{\beta_1}{\tau} + C + \frac{\tau}{\beta_1} K)^{-1} \{ (\frac{\beta_1}{\tau} - 1) K y_n + (\frac{\beta_1}{\tau} M + \frac{\beta_1}{\tau} C + \frac{\tau}{\beta_1} K) \ddot{y}_n + M (-\frac{\tau}{\beta_2} + \frac{\beta_1}{\tau}) \dot{y}_{n+1} + M (\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{\beta_1}{\tau}) \dot{y}_n \}$$

$$y_n = y_n - \frac{\tau}{\beta_2} \dot{y}_n, \quad \dot{y}_n = \dot{y}_n - \frac{\tau}{\beta_2} \ddot{y}_n, \quad \beta_1, \beta_2 \text{ は式(5)の分子, } \beta_1, \beta_2 \text{ は分母の特性根である。}$$

上式で、 y_{n+1} , $\dot{y}_{n+1}$, $\ddot{y}_{n+1}$ は複素数で表すが、その実数部を取りはく。図-3 は 1 自由度系を対象とした数値計算例である。系の非減衰固有振動数を 0.2 秒、減衰定数を 10% とした場合である。振幅 1 gal の正弦波を入力した場合の応答加速度が示されている。これは 6 分母形式 Duhamel 積分により求めたものであり、折線状のものが提案する手法によるものである。粗い積分時間間隔にもかかわらず応答の振幅特性のよいことがわかる。

参考文献 1) 清水信行・渡辺孝二郎・堀田健司・鎌田知枝・山本鎮男：日本機械学会論文集(第1部), 43巻 368号, pp.1272-1289, 1977.