

中央大学大学院 学生員 児玉敏雄
三井造船(株) 正員 平野廣和
中央大学 正員 川原睦人

1. はじめに

円柱後方に生じるカルマン渦によって円柱に対する振動空気力が生ずることはよく知られていることである。非定常空気力と構造系との間の機構は多くの模形実験によって明らかにされてきている。構造物の耐風性において動的現象の解明は非常に重要であり、多くの風洞実験が行なわれているが数値解析による報告は極めて少ない。ここでは、流れと構造の連成振動に着目して、ナビエ・ストークスの方程式と構造の振動方程式に有限要素法を適用し連成方程式を定式化し数値実験を試みた。今回の数値実験では弾性支持された二次元円柱まわりの流れと円柱の振動応答を求めた。この報告は流れと構造との連成振動に対する一つの有限要素法を提案することを目的とする。

2. 基礎方程式

流体の運動方程式および質量保存の式は(1),(2)式で振動方程式は(3)式である。

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j} \right) + P_{,i} - \mu (v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} - F_i = 0 \quad \text{---- (1)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad \text{---- (2)}, \quad m_k \ddot{y}_k + \sum_{l=1}^N C_{kl} \dot{y}_l + \sum_{l=1}^N K_{kl} y_l = P_k \quad \text{---- (3)}$$

(1),(2)式に関して流体中の音速 $C = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$ を導入し変形する。またこの式に無次元化をほどこすと(4),(5)式のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} + C P_{,i} - \nu (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} - F_i = 0 \quad \text{---- (4)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U_i P_{,i} + C U_{i,i} = 0 \quad \text{---- (5)}$$

(4),(5)式に対してガレリキニ法を適用し圧力項と粘性項に部分積分をほどこした上で有限要素方程式に定式化する。領域は三角形要素で離散化し、形状関数は一次関数を用い重み関数も同様とする。また時間方向への離散化は二段階ラックスウェンドロフ法を用いて行う。

$$\bar{M}_{\alpha\beta}^{n+1/2} = \bar{M}_{\alpha\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} (K_{\alpha\beta rj} U_{\alpha j}^n U_{ri}^n - C H_{\alpha\beta s} P_s^n + S_{\alpha\beta sj} U_{\alpha j}^n - \hat{r}_{\alpha i}^n) \quad \text{---- (6)}$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} P_s^n = \bar{M}_{\alpha\beta} P_s^n - \frac{\Delta t}{2} (A_{\alpha\beta r i} U_{\alpha i}^n P_r^n + C B_{\alpha\beta s i} U_{\alpha i}^n) \quad \text{---- (7)}$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} U_{\alpha i}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} U_{\alpha i}^n - \Delta t (K_{\alpha\beta rj} U_{\alpha j}^n U_{ri}^{n+1} - C H_{\alpha\beta s} P_s^n + S_{\alpha\beta sj} U_{\alpha j}^n - \hat{r}_{\alpha i}^n) \quad \text{---- (8)}$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} P_s^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} P_s^n - \Delta t (A_{\alpha\beta r i} U_{\alpha i}^n P_r^{n+1} + C B_{\alpha\beta s i} U_{\alpha i}^n) \quad \text{---- (9)}$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_V (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) dV, \quad K_{\alpha\beta rj} = \int_V (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{r,j}) dV, \quad A_{\alpha\beta r i} = \int_V (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{r,i} \Phi_{r,i}) dV, \quad H_{\alpha\beta s} = \int_V (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} \Phi_{s,i}) dV$$

$$S_{\alpha\beta sj} = \nu \int_V (\Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,i}) dV + \nu \int_V (\Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,k}) \delta_{ij} dV, \quad \hat{r}_{\alpha i} = \int_{S_1} (\Phi_{\alpha} R_i) dS + \int_V (\Phi_{\alpha} F_i) dV$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} : \text{集中化質量マトリックス}, \quad \bar{M}_{\alpha\beta} = \bar{M}_{\alpha\beta} e + (1-e) M_{\alpha\beta}$$

物体表面での変位および力の連続より連成された振動方程式を導くと(10)式のようになる。簡単のためx方向y方向に関する添字は省略する。

$$(m_{\mu\lambda} + L_{\mu}^T \mu / \beta_{\alpha\omega}^T M_{\alpha\beta} \beta_{\alpha\omega} L_{\omega\lambda}) \ddot{x}_{\lambda} + (C_{\mu\lambda} + L_{\mu}^T \mu / \beta_{\alpha\omega}^T K_{\alpha\beta} \beta_{\alpha\omega} L_{\omega\lambda} + L_{\mu}^T \mu / \beta_{\alpha\omega}^T S_{\alpha\beta} \beta_{\alpha\omega} L_{\omega\lambda}) \dot{x}_{\lambda} + K_{\mu\lambda} x_{\lambda} = -L_{\mu}^T \mu / \beta_{\alpha\omega}^T M_{\alpha\beta} \alpha_{\beta\omega} U_{\omega} - L_{\mu}^T \mu / \beta_{\alpha\omega}^T K_{\alpha\beta} \alpha_{\beta\omega} U_{\omega} - L_{\mu}^T \mu / \beta_{\alpha\omega}^T S_{\alpha\beta} \alpha_{\beta\omega} U_{\omega} + L_{\mu}^T \mu / \beta_{\alpha\omega}^T H_{\alpha\beta} \alpha_{\beta\omega} P_{\omega} + L_{\mu}^T \mu / \beta_{\alpha\omega}^T H_{\alpha\beta} \beta_{\alpha\omega} P_{\omega}^* \quad \text{---- (10)}$$

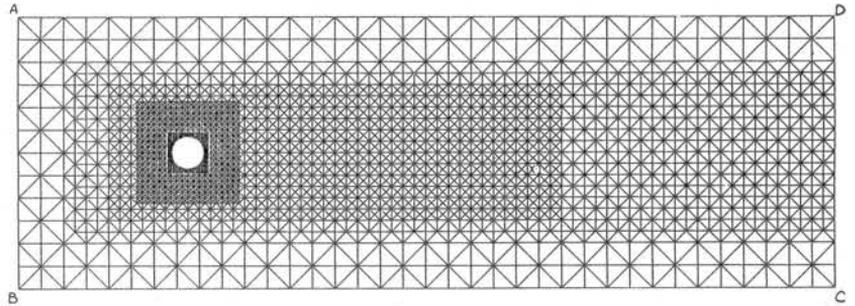
$m_{\mu\lambda}$: 振動質量マトリックス, $C_{\mu\lambda}$: 減衰マトリックス, $K_{\mu\lambda}$: 剛性マトリックス

$L_{\omega\lambda}, \alpha_{\beta\omega}, \beta_{\alpha\omega}$: 変換マトリックス, *付は物体表面上の節点量を表わす。

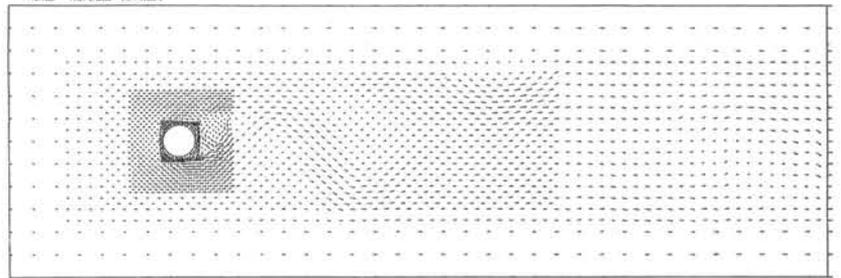
以上(6)~(10)式を逐時時間毎に計算する。ただし(10)式の計算に関しては線形加速度法を用い逐時近似してゆくものとする。

3. 数値計算例

無風状態に弾性支持された円柱が突然一様流を受け非定常空気力によって振動を始めるという状況を想定した。領域を図-1のような要素数4632, 節点数2386の有限要素で離散化する。円柱表面は36に細分割されている。流れに関する諸係数, 構造に関する諸量, 境界条件を表-1~3に示す。以上の条件により連成問題の非定常解析を行った。微小時間間隔 $\Delta t = 0.0002$ とし12000回の繰り返し計算結果を示す。



(図-1) 有限要素分割図



(図-2) 流速図

図-2はレイノルズ数 $Re = 1500$ における流況図である。後流に渦の発生が明らかに確認できる。図-3, 図-4は抗力および揚力係数の時間的変化を示したものである。揚力係数は不規則な変動をくり返し次第に増幅している。図-5はこの時の変位と円柱の直径 d で無次元化したものである。変位の振動数は固有振動数 $f_0 = 3.0$ にほぼ近い値をとっているが構造減衰を零とし粘性減衰が非致的

流体に関する諸量	
動粘性係数	$\nu = 0.1$
空気の密度	$\rho = 0.132$
空気中の音速	$C = 337.0$

(表-1)

境界条件	
A - B	$U=50.0 \quad V=0.0$
A-B-C-D	$V=0.0$

(表-2)

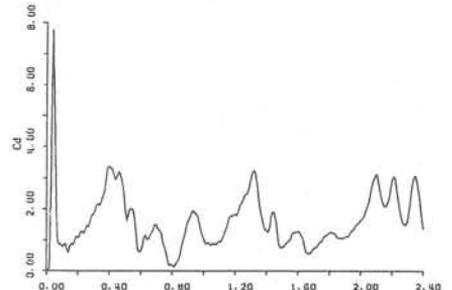
構造の諸量	
振動質量	$m=85.0 \quad I=85.0$
減衰定数	$C_x = C_y = C_\theta = 0.0$
バネ定数	$k_x = 3.0 \times 10^6 \quad k_y = k_\theta = 3.0 \times 10^6$
円柱の直径	$d = 3.0$

(表-3)

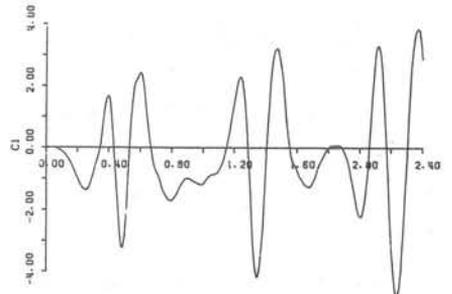
小さいためと考えられる。今回の試みにより, 問題はあがるが有限要素法をこのような動的連成問題の解析手法として適用できるということが確認された。本計算は東京大学大型電子計算機センター HITAC-M280Hを使用しCPUで120分を要した。

4. 参考文献

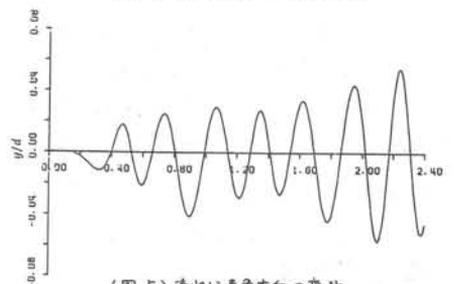
- (1) M.Kawahara and H.Hirano "Two Step Explicite Finite Element Method for High Reynolds Number Viscous Fluid Flow", Submitted to Proc. J. S. C. E. (inpress), 1981



(図-3) 抗力係数の時間的変動



(図-4) 揚力係数の時間的変動



(図-5) 流れに直角方向の変位