I-219　半無限弾性地盤の動的応答計算 —— 1階双曲系の座標変換差分法

甲南大学　正会員　田口友康
電力中央研究所　正会員　塩尻弘雄

1. はじめに

半無限領域（一般に非有界領域）上の1階形で書かれる波動伝播問題の初期値問題を，無限点を有限点に写す座標変換によって有限領域上の方程式に書きかえ，これを Lax-Wendroff 型の差分法で解く算法を提案する。その数値実験を観察すると，変換後領域の周辺部（すなわち変換前領域の無限遠近傍）へ侵入する外向波は，そこで伝播速度を減じつつ波動エネルギーを失って消滅していく。周辺部から内部へ向う数値的な派生波はほとんどみられない。

2. 1次元問題による説明

スカラーの未知関数 $u=u(t,x)$ の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x} \qquad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

に対して，数直線 $(-\infty,\infty)$ を線分 $(-L,L)$ へ1対1に写す変換

$$\left.\begin{aligned}
&x=G[x']\equiv\int_0^{x'}\frac{d\xi}{a(\xi)} \qquad |\xi|<L\\
&0\leqq a(\xi)\leqq 1, \quad |\xi|\leqq L\\
&a(\xi)=1, \quad |\xi|\leqq \ell, \quad \ell<L\\
&a(\xi)=O\{(L-|\xi|)^{\alpha}\}, \ (\alpha>1), \quad |\xi|=L \text{ の近傍}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

をほどこすと

$$\frac{\partial v}{\partial t} = b(x')\frac{\partial v}{\partial x'} \qquad -L<x'<L \qquad b(x')=c\cdot a(x') \tag{3}$$

となる。(3) の Lax-Wendroff 型差分をつくると

$$\left.\begin{aligned}
v_i^{n+1} &= v_i^n + \frac{k}{2h} b(x_i')(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n)\\
&+ \frac{k^2}{2h^2} b(x_i')\Big\{ b(x'_{i+\frac12})v_{i+1}^n + b(x'_{i-\frac12})v_{i-1}^n\\
&\qquad -\big(b(x'_{i+\frac12})+b(x'_{i-\frac12})\big)v_i^n\Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ここに，

i は空間メッシュ $x_i'=ih$ を表わす番号，$|x_i'|\leqq L$

n は時間メッシュ $t_n=nk$ を表わす番号，

また境界条件は

$v_i^n=0, \quad x_i=\pm L$ にて。

3. 一般論（安定と収束）

n 次元空間における m 要素未知ベクトル値関数 $u=u(t,x)$ についての1階双曲系

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

$A_\mu(x)$, $(\ =1,\cdots,n)$ は m 次行列.

に対して座標変数 x_i ごとに(2)の形の変換をほどこすと

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{\mu=1}^{n} B_\mu(x')\frac{\partial v}{\partial x'_\mu}, \qquad x'=(x_1',\cdots,x_n')\in\Omega \tag{6}$$

ここに $\Omega=\{x' \mid |x'_\mu|<L\}$, $B_\mu(x')=a(x'_\mu)A_\mu(G[x'])$,

となる。(6) の Lax-Wendroff 差分近似（部分ステップ型）をつくり，その解を $v_k(t,x')$ とかけば次の結果がなりたつ。

$\boxed{\text{結果}}$ (5)が対称双曲系のとき，スキームは

$$\kappa\equiv\frac{k}{h}\leqq\Big[\max_{1\leqq\mu\leqq n}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} r(A_\mu(x))\Big]^{-1} \tag{7}$$

$r(\cdot)$ はスペクトル半径

で安定であって，そのような κ を固定して $k\to 0$ とするとき等長変換領域 $\Omega_0\equiv\{x' \mid |x'_\mu|\leqq \ell\}$ での評価

$$\max_{0\leqq t\leqq T}\|v_k - u\|_{L^2(\Omega_0)}(t) \leqq C_T\cdot h^2 \tag{8}$$

がなりたつ。

4. 半無限弾性体の表面加振問題への応用

図1の (x,z) 領域で弾性体各点での変位ベクトルを $(U(t,x,z),\ W(t,x,z))$ とすれば

$$\left\{\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial z}\\
\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

ここに

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_x &= (\lambda+2G)\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda\frac{\partial W}{\partial z}\\
\tau &= G\Big(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\Big)\\
\sigma_z &= \lambda\frac{\partial U}{\partial x} + (\lambda+2G)\frac{\partial W}{\partial z},
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

ρ は密度，λ と G は弾性定数。

(9) において変位速度成分 $u=\frac{\partial U}{\partial t}$, $w=\frac{\partial W}{\partial t}$ を新しい未知変数にとり，(10) の時間微分をとった式と連立させると

$$\mathcal{U} = {}^t(u,\ w,\ \sigma_x,\ \tau,\ \sigma_z)$$

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \lambda+2G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

として，1階双曲系

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = A_x \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + A_z \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \qquad (11)$$

になる。鉛直一様周期荷重条件（周期 T_0; $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$）:

$$\sigma_z = \begin{cases} 1 \cdot \sin \omega t & |x| \leq d,\ z = 0 \\ 0 & |x| > d,\ z = 0 \end{cases}$$
$$\tau = 0 \qquad |x| < \infty,\ z = 0$$

および初期条件

$$u = w = \sigma_x = \tau = \sigma_z = 0$$

の下で (11) の Lax-Wendroff 差分近似式を解く。（地表境界では Lax-Wendroff 式に必要な両端差分点がとれないので，片側差分とする。）

$\boxed{\text{モデル計算のパラメータ}}$

- 加振巾：$2d = 2$.
- 物性定数：$\rho = 1$, $\lambda = 1$, $G = 0.5$,（ポアソン比 $1/3$）
- 外力周期：$T_0 = 2 \sim 20$.

（これはP波速度 $V_p = \sqrt{2}$, S波速度 $V_s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ をうえ，また無次元化振動数 $\eta \equiv \frac{\omega d}{V_s} = 4.44 \sim 0.444$ のケースである。）

- 領域の変換：$|\xi| \leq 3d$ は等長変換，$3d < |\xi| < 5d$ は縮小変換で，変換関数 $a(\cdot)$ のすそ野は2次型，$d = 2$.
- 差分メッシュ：$h = d/5$, $k = d/10$,（$K = 0.5$）.

図2は $T_0 = 5$（$\eta = 1.777$）のケースで，オ1.6波（$t = 8$），オ1.8波（$t = 9$），オ2.0波（$t = 10$）時点の鉛直速度場 w を示す。（等長変換領域のみ示してある。）

5. まとめ

非有界領域の非定常波動伝播問題を座標変換して解く方法は特に新しいものではない。しかし従来のものは縮小変換領域で発生する数値的派生波のために必ずしも成功していない。本方法は1階双曲系に対するLax-Wendroff差分法を適用することで派生波をおさえることを試みたものである。

（参考文献）1. 田口：動弾性波伝播の数値解法，電力中研報告 679003（昭55.3）. 2. 同：The near-field finite difference solution to linear hyperbolic systems, Res. Note, Konan Univ., Oct. 1981.

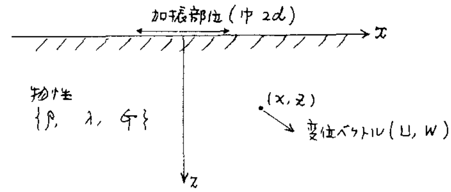

図1　半無限弾性体とその座標系.

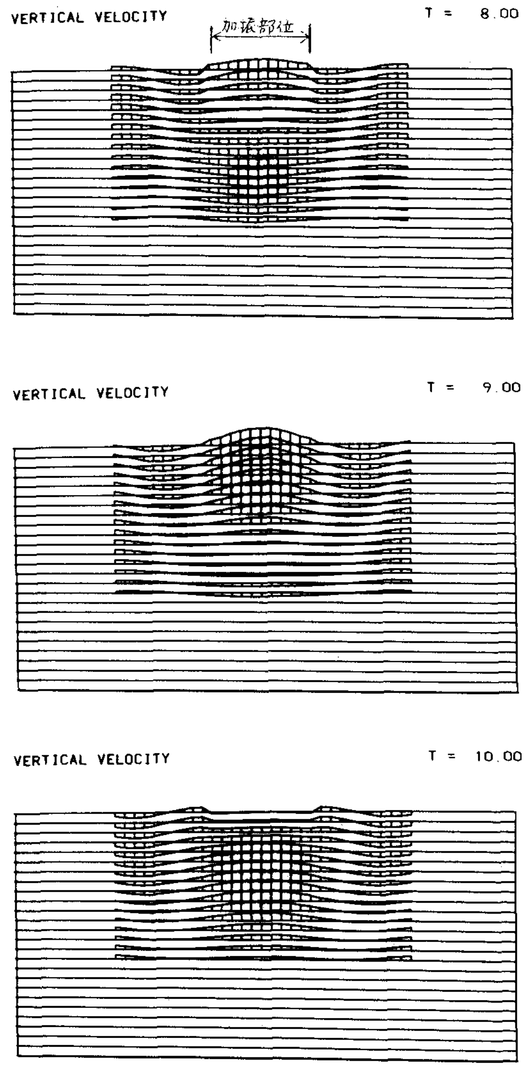

図2　鉛直一様周期荷重時の鉛直速度場 w
荷重周期 $T_0 = 5$，無次元化振動数 $\eta = 1.777$
（注）等長変換領域のみ図示してある。長方形領域の左辺，右辺，下辺は無限遠に対応する。