

1. まえがき 本文は、半無限弾性体内部に長方形等分布上下加振力が作用する場合の変位を求める計算式と数値計算結果を示したものである。変位式の誘導については、筆者らが半無限弾性体内部に点加振力が作用する場合に対して示した文献¹⁾の方法を用いた。また、変位式は特異点と有する無限二重積分で表わされるため、本文では、変数変換を施した後に複素周回積分によりこの積分の評価を行い、上下変位に対する若干の数値計算例を示した。

2. 長方形等分布上下加振力による上下変位式 図-1に示されるように等分布加振力 $g_z e^{i\omega t}$ による上下変位式は次式のように表わされる。

$$u_z = -\frac{ab g_z e^{i\omega t}}{2\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{k W(k)}{\beta F(k)} T(k, \theta) e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} d k d \theta \quad (1)$$

$$\text{ただし, } W(k) = \alpha \beta (k^2 + \beta^2)^2 \tilde{P} + 4 k^2 \alpha^2 \beta^2 \tilde{Q} + 4 k^2 \alpha \beta \tilde{R} + k^2 (k^2 + \beta^2)^2 \tilde{S} \\ - 4 k^2 \alpha \beta (k^2 + \beta^2) (e^{-\alpha H} e^{-\beta z} + e^{-\alpha z} e^{-\beta H})$$

$$F(k) = (k^2 + \beta^2)^2 - 4 k^2 \alpha \beta \quad (\text{Rayleigh 関数})$$

$$T(k, \theta) = \frac{\sin(a k \cos \theta)}{a k \cos \theta} \frac{\sin(b k \sin \theta)}{b k \sin \theta}, \quad \tilde{P} = e^{-\alpha(z+H)} + e^{\pm \alpha(z-H)}, \\ \tilde{Q} = e^{-\alpha(z+H)} - e^{\pm \alpha(z-H)}, \quad \tilde{R} = e^{-\beta(z+H)} + e^{\pm \beta(z-H)},$$

$\tilde{S} = e^{-\beta(z+H)} - e^{\pm \beta(z-H)}$, $\alpha = \sqrt{k^2 - k_p^2}$, $\beta = \sqrt{k^2 - k_s^2}$, $k_p = \omega/V_p$, $k_s = \omega/V_s$, V_p , V_s はそれぞれ縦波、横波の伝播速度, μ はせん断弾性係数, H は加振深さ, $2a$, $2b$ は辺長, g_z は加振力の振幅, さらに, 上記中の符号 $(\pm)$ はそれぞれ載荷面より上の部分と下の部分に相当する。

3. 変位式の無限積分の評価と数値計算式 式(1)に見られる実積分変数 k に関する無限積分と Ewing²⁾の方法に基づいて、変積分変数 ζ と τ と置き換えて複素平面に拡張し、図-2に示す分岐線積分と併った複素周回積分により評価を行う。図-2に示す分岐線積分路は分岐点と実軸上に戻す操作により直線積分となる。このとき、積分路に沿った α , β の符号の変化に注意し、往路、復路で相互の積分が打ち消し合うことを考慮し、さらに、変数 θ に関する積分は被積分関数の周期性により積分範囲が $0 \sim \pi$ となることを考

え合せれば、最終的に次式が得られる。なお、紙面の都合上、無次元化を行い、数値計算式を示しておく。

$$u_z = -\frac{2 g_z e^{i\omega t}}{\pi^2 \mu k_s^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2 \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \frac{W(\zeta)}{\beta F(\zeta)} \right\} \frac{\zeta}{\beta} e^{-\tau a_0 \theta} d\tau + \int_0^\infty \left\{ \frac{W(\zeta)}{\beta F(\zeta)} - \frac{\overline{W(\zeta)}}{\beta F(\zeta)} \right\} \frac{\zeta}{\beta} e^{-i\tau a_0 \theta} d\zeta \right. \\ \left. + \int_\Gamma \left\{ \frac{W(\zeta)}{\beta F(\zeta)} - \frac{\overline{W(\zeta)}}{\beta F(\zeta)} \right\} \frac{\zeta}{\beta} e^{-i\tau a_0 \theta} d\zeta - 2\pi i \left\{ \frac{W(\zeta)}{\beta F(\zeta)} \frac{\zeta}{\beta} e^{-i\tau a_0 \theta} \right\}_{\zeta=\zeta_R} \right] \frac{d\theta}{(-2) \cos \theta \sin \theta} \quad (2)$$

ただし, $\zeta = k/k_s$, $\tau = \tau/k_s$, $a_0 = k_s a$, $\kappa = b/a$, $c = k_s H$, $d = k_s z$, $\bar{X} = x/a$, $\bar{Y} = y/b$, $\alpha = \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}$, $\beta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$, $\gamma = \sqrt{(1-2\nu)/(2(1-\nu))}$, ν はポアソン比, ζ_R は Rayleigh 極, $F(\zeta) = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta}$ である。

$$W(\zeta) = \alpha \beta (2\zeta^2 - 1)^2 \tilde{P} + 4 \zeta^2 \alpha^2 \beta^2 \tilde{Q} + 4 \zeta^2 \alpha \beta \tilde{R} + \zeta^2 (2\zeta^2 - 1)^2 \tilde{S} - 4 \zeta^2 \alpha \beta (2\zeta^2 - 1) (e^{-\alpha c} e^{-\beta d} + e^{-\alpha d} e^{-\beta c}) \\ F(\zeta) = (2\zeta^2 - 1)^2 - 4 \zeta^2 \alpha \beta, \quad \tilde{P} = e^{-\alpha(d+c)} + e^{\pm \alpha(d-c)}, \quad \tilde{Q} = e^{-\alpha(d+c)} - e^{\pm \alpha(d-c)}, \quad \tilde{R} = e^{-\beta(d+c)} + e^{\pm \beta(d-c)}, \\ \tilde{S} = e^{-\beta(d+c)} - e^{\pm \beta(d-c)} \\ \frac{\zeta}{\beta} e^{-i\tau a_0 \theta} = \exp \left\{ -i\tau a_0 \left[(\bar{X}+1) \cos \theta + \kappa (\bar{Y}+1) \sin \theta \right] \right\} + \exp \left\{ -i\tau a_0 \left[(\bar{X}-1) \cos \theta + \kappa (\bar{Y}-1) \sin \theta \right] \right\} \\ + \exp \left\{ -i\tau a_0 \left[(\bar{X}+1) \cos \theta - \kappa (\bar{Y}-1) \sin \theta \right] \right\} + \exp \left\{ -i\tau a_0 \left[(\bar{X}-1) \cos \theta - \kappa (\bar{Y}+1) \sin \theta \right] \right\}$$

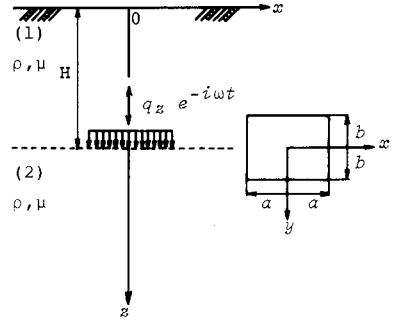


図-1 解析モデルと座標系

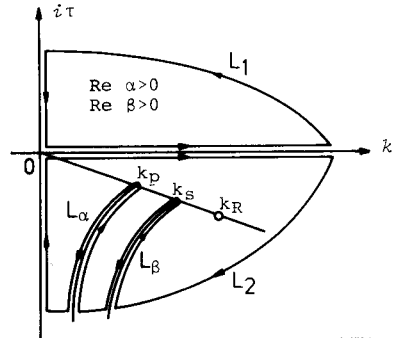


図-2 周回積分路 (ω : 複素数)

$$- \left\{ \exp\{-i\zeta a_0\} (\bar{X}-1) \cos \theta + \kappa (\bar{Y}+1) \sin \theta \right\} + \exp\{-i\zeta a_0\} (\bar{X}+1) \cos \theta + \kappa (\bar{Y}-1) \sin \theta \left\{ \right. \\ \left. + \exp\{-i\zeta a_0\} (\bar{X}-1) \cos \theta - \kappa (\bar{Y}-1) \sin \theta \right\} + \exp\{-i\zeta a_0\} (\bar{X}+1) \cos \theta - \kappa (\bar{Y}+1) \sin \theta \left\{ \right\}$$

また, $\overline{W}(\zeta)$, $\beta F(\zeta)$ は $W(\zeta)$, $\beta F(\zeta)$ における α , β の符号がそれぞれ実数のときは同符号, 純虚数のときは異符号となる関数を意味する。

(計算条件)

$$a_0=0.25, \kappa=1.0 \text{ (正方形)}, \nu=1/3, \bar{X}=0, 1, 4, \bar{Y}=0$$

4. 数値計算結果

前述の上下

変位式の最終式(2)は数値積分によ

って解が求められるが, 積分さざ

みについで文献(3)を参考にした。

$$u_x = \frac{a \beta_2 e^{i\omega t}}{\pi \mu} \sqrt{F_1^2 + F_2^2} e^{-i\varphi_F} \quad (3)$$

なる形で整理を行った。ただし,

F_1, F_2 および $\varphi_F (= -\tan^{-1}(F_2/F_1))$

はそれぞれ実部, 虚部および偏角

である。ここでは, 計算結果とし

て, 等分布上下加振力による上下

変位と上下点加振力によるその

比較を示す。なお, 点加振による

変位は文献(4)によつて計算した。

図-3は表面加振 ($\frac{\omega H}{V_s} = 0.0$) に

よる変位の实部と虚部とそれぞれ

载荷中央点 ($\bar{X}=0, \bar{Y}=0$) と载荷面

外の点 ($\bar{X}=1, 4, \bar{Y}=0$) について比

較したものである。虚部 F_2 につ

いては一致しているが, 実部 F_1 につ

いては明らかな違いがある。した

が, 加振条件の違いによる影

響は実部 F_1 に現われるものと考え

られる。同図の(b)は载荷端に相当

しているために, 载荷中央点の(a)と同じような挙動を示しているが, (c)の $\bar{X}=4$ の表面近傍では, 等分布加振に

よる変位は点加振によるそれに近づく傾向を示している。一方, 図-4は加振深さが $\frac{\omega H}{V_s} = 2.0$ のときの各加振

力による変位の比較を示したものである。表面加振の場合と同様に, 等分布加振力と点加振力による変位の虚部

F_2 は一致しているが実部 F_1 に差異が見られる。同図の(c)の $\bar{X}=4$ では, 実部 F_1 , 虚部 F_2 とともに自由表面近くで大

きく深くなるにつれて小さくなっている。つまり, 文献(4)に得られている点加振の場合の結果と同様に, 等分布

加振力による変位についても, 加振位置からの水平距離 $\bar{X} (= \frac{x}{a})$ が大きくなるとともに, 表面波成分が卓越す

ことを示している。なお, 紙面の都合上, それぞれの加振位置における各加振力による $\bar{X}=0, 1, 4$ での変位

の絶対値 $\sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ と偏角 φ_F については講演時に譲りたい。

参考文献) 1) 高谷, 北村, 榎井: 第36回全国土木学会年次学術講演会, I-261, 1981. 2) Ewing, et al:

Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, 1957. 3) 北村, 榎井, 富士田: 建設工学研究所

報告, No. 22, pp. 147~186, 1980. 4) 高谷, 北村, 榎井: 土木学会関西支部年次学術講演会(昭和57年度), 1982.

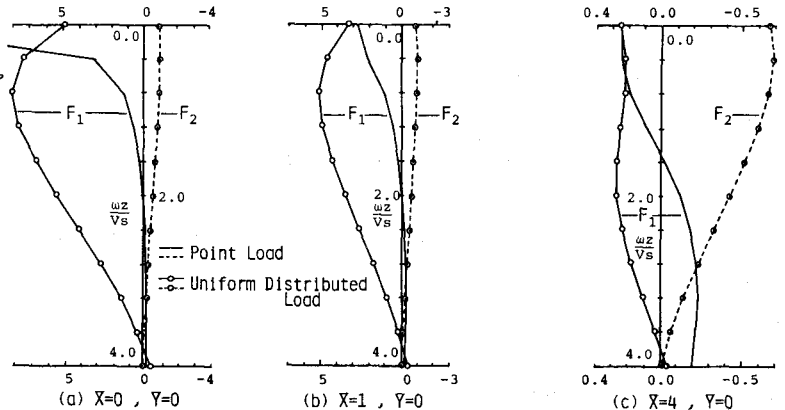


図-3 等分布加振と点加振による上下変位の比較 ($\frac{\omega H}{V_s} = 0.0$)

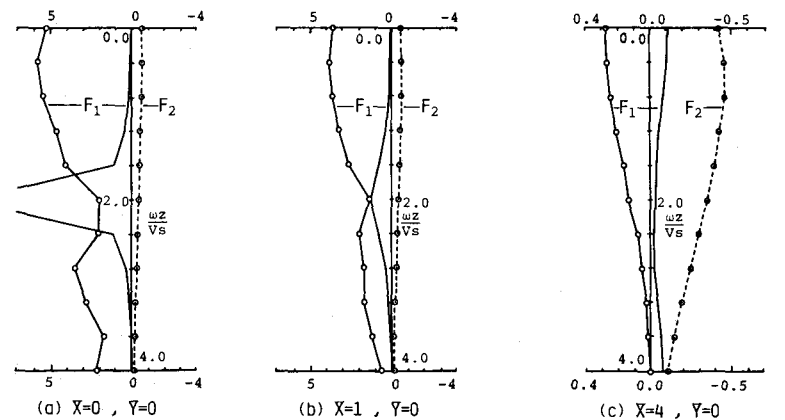


図-4 等分布加振と点加振による上下変位の比較 ($\frac{\omega H}{V_s} = 2.0$)