

室蘭工業大学 正員 松岡 健一  
北海道大学 正員 能町 純雄  
八戸工業大学 正員 杉田 修一

1. まえがき 入射せん断波をうける弾性体の応答問題は種々研究されており<sup>1)</sup>、著者も前報で弾性体中にある厚肉円筒が入射せん断波をうける場合の解法を示し、若干の数値計算結果を示した<sup>2)</sup>。ここでは、さらに数多くの数値計算を、円筒の肉厚、境界面の条件、弾性係数、ポアソン比等を変化させて行い結果を比較検討する。

2. 波動方程式の変位解 円柱座標で表わされる波動方程式の解はすでに示したが、ここに簡単に示す。図-1のように座標をとリ、せん断波の入射方向を $z$ 方向とし、変位成分を $u, v, w$ とすれば、円筒では、

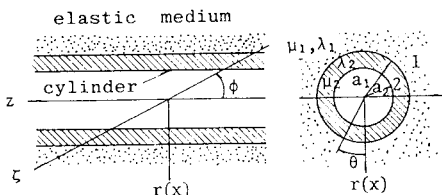


図-1 弾性体中の円筒

$$u = \sum_m C_m (\bar{A}_{mr} + \bar{B}_{mr}) \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - Nz)}, \quad (1)$$

$$v = \sum_m (\bar{A}_{mr} - \bar{B}_{mr}) \sin m\theta \cdot e^{i(\omega t - Nz)}, \quad (2)$$

$$w = \sum_m C_m \bar{w}_{mr} \cos m\theta \cdot e^{i(\omega t - Nz)}, \quad (3)$$

ここで、 $C_0 = 1/2\pi$ ,  $C_m = 1/\pi$  ( $m \neq 0$ ),  $N = \omega \cos \varphi / v_s$ ,  $\omega$ : せん断波の角速度,  $v_s$ : せん断波の速度,  $\varphi$ : 入射角度,  $t$ : 時間である。また、 $\mu, \lambda$ : Laméの弾性定数,  $\rho$ : 密度とし、 $Nu^2 = N^2 - \rho\omega^2/\mu$ ,  $Nu^2 = N^2 - \rho\omega^2/(2\mu + \lambda)$  とおけば、 $\bar{A}_{mr}, \bar{B}_{mr}, \bar{w}_{mr}$  は

$$\bar{A}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \chi_{mp}^{(k)}(Nu_r) / Nu \{ \alpha_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - iNE_{mk} / 2 \} + (Nu^2/\rho\omega^2) \{ \chi_{mp}^{(k)}(Nu_r) / Nu - Nu \chi_{ms}^{(k)}(Nu_r) / N^2 \} \cdot \{ B_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} \} \}, \quad (4)$$

$$\bar{B}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ -\chi_{ms}^{(k)}(Nu_r) / Nu \{ \alpha_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} / 2 \} + (Nu^2/\rho\omega^2) \{ \chi_{ms}^{(k)}(Nu_r) / Nu - Nu \chi_{mp}^{(k)}(Nu_r) / N^2 \} \cdot \{ B_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} \} \}, \quad (5)$$

$$\bar{w}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} \{ G_m^{(k)}(Nu_r) E_{mk} - i(2\mu/\rho\omega^2) \{ G_m^{(k)}(Nu_r) - G_m^{(k)}(Nu_r) \} \cdot \{ B_{mk} / 2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} \} \}, \quad (6)$$

と表わされる。また式中の関数は、

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(k)}(Nu_r) &= R_{m,m}^{(k)}(Nu_r) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \\ \chi_{mp}^{(k)}(Nu_r) &= R_{m,m}^{(k)}(Nu_r) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \\ \chi_{ms}^{(k)}(Nu_r) &= R_{m,m}^{(k)}(Nu_r) / R_{m,m}^{(k)}(Na_k), \\ R_{j,m}^{(k)}(Nu_r) &= I_j(Nu_r) K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) K_j(Nu_r) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$I, K$ : 変形オイ種及びオイ種2種のベッセル関数,  $a_0 = a_2$ , とし、 $\alpha, \beta, A, B, E$  は未知定数である。

円孔を有する無限体は、式(4)~(6)で  $k=2$  のみとし、 $a_1 \rightarrow \infty$  とし、式中の関数を

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(2)}(Nu_r) &= K_m(Nu_r) / K_m(Na_2), \chi_{mp}^{(2)}(Nu_r) = -K_m(Nu_r) / K_m(Na_2), \\ \chi_{ms}^{(2)}(Nu_r) &= -K_m(Nu_r) / K_m(Na_2), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

とする。また入射波動は円柱座標で、

$$u^{(0)} = U_0 \exp[i\omega\{t - (2\cos\varphi - r/2\sin\varphi \cos\theta)/v_s\}] \cos\varphi \cos\theta, \quad (9)$$

$$v^{(0)} = -U_0 \exp[i\omega\{t - (2\cos\varphi - r/2\sin\varphi \cos\theta)/v_s\}] \cos\varphi \sin\theta, \quad (10)$$

$$w^{(0)} = U_0 \exp[i\omega\{t - (2\cos\varphi - r/2\sin\varphi \cos\theta)/v_s\}] \sin\varphi, \quad (11)$$

と表わされる。さらに式(4)~(6)中の係数  $A, B, E$  は、次の適合条件を満足しなければならない。

$$a_k A_{mk} = \bar{A}_{mr} r = a_k, \quad (12), \quad a_k B_{mk} = \bar{B}_{mr} r = a_k, \quad (13).$$

3. 境界条件 弾性体中の円筒の問題は、円筒と円孔を有する無限体を、境界条件を満足するように組合せて解析することができる。いま、無限体および円筒の変位および応力に関するものをそれぞれ上添字(1)、(2)で区別し、その他の係数を下添字1, 2で区別するものとおれば、境界条件は、中空円筒として

i).  $r=a_2$  において

$$(T_{r\theta}^{(1)})_{r=a_2} = (T_{r\theta}^{(2)})_{r=a_2} = (U_r^{(1)})_{r=a_2} = 0, \quad (14)$$

ii).  $r=a_1$  において

a). 変位および応力が連続の場合 (case-I)

$$u^{(0)} + u^{(1)} r=a_1 = u^{(2)} r=a_1, \quad (15) \quad v^{(0)} + v^{(1)} r=a_1 = v^{(2)} r=a_1, \quad (16)$$

$$w^{(0)} + w^{(1)} r=a_1 = w^{(2)} r=a_1, \quad (17) \quad (T_{r\theta}^{(0)} + T_{r\theta}^{(1)})_{r=a_1} = (T_{r\theta}^{(2)})_{r=a_1}, \quad (18)$$

$$(T_{rz}^{(0)} + T_{rz}^{(1)})_{r=a_1} = (T_{rz}^{(2)})_{r=a_1}, \quad (19) \quad (U_r^{(0)} + U_r^{(1)})_{r=a_1} = (U_r^{(2)})_{r=a_1}, \quad (20)$$

b). せん断応力が存在しない場合 (case-II)

$$(T_{r\theta}^{(0)} + T_{r\theta}^{(1)})_{r=a_1} = 0, \quad (21) \quad (T_{r\theta}^{(2)})_{r=a_1} = 0, \quad (22)$$

$$(T_{rz}^{(0)})_{r=a_1} = 0, \quad (23) \quad (T_{rz}^{(0)} + T_{rz}^{(1)})_{r=a_1} = 0, \quad (24)$$

および式(15), (20)となる。

#### 4. 数値計算

数値計算として円筒の肉厚，ポアソン比，弾性係数比などを変化させて行ったが，図-2~4には，円筒の内外径比  $a_1/a_2 = 1.1$ ，弾性定数比  $\mu_2/\mu_1 = 100$ ，せん断波の入射角  $\phi = \pi/4$  で，ポアソン比  $\nu_1 = \nu_2 = 0.05, 0.25,$

0.45 と変化させた場合の結果を示した。

図-2 は  $\theta = \pi/2$ ， $r = a_1$  および  $a_2$  における  $\sigma_\theta$  の振中の絶対値を無限弾性体中を伝わるせん断波によるときの  $\sigma_\theta$  の値との比を示した。実線が case-I，破線が case-II である（以下の図も同様）。

図から  $r = a_1$ （弾性体側）では case-II の方が case-I より全体的に大きく特に  $\omega$  の小さな範囲で著しい。また case-II ではポアソン比による相違は小さいが，case-I ではポアソン比の大きなもの程大きくなっている。 $r = a_2$  では case-I と II で大きな差はないが，case-I のときポアソン比によって値が異なり， $r = a_1$  と同様にポアソン比の大きなもの程大きい。

図-3 は  $\theta = 0$ ， $r = a_1$  および  $a_2$  における  $\sigma_\theta$  の同様の図であるが， $r = a_1$  ではやはり case-II の方が I より大きい，どちらもポアソン比による相違も大きく  $\omega$  が大きくなるに従い case-I と II の差が小さくなっている。また， $r = a_2$  では当然のことながら境界条件の影響による影響が大きく特に  $\omega$  の小さな値と  $\omega$  が case-I が II よりかなり大きくなり，この場合はポアソン比の小さなものが大きい値を示している。

図-2，3 とともに  $r = a_2$  では，この計算範囲では， $\omega$  が大きくなるに従って  $\sigma_\theta$ ， $\sigma_z$  が小さな値に減少していることがわかる。

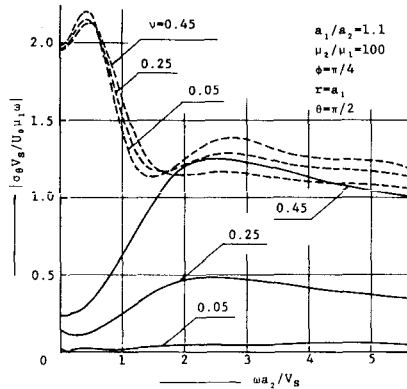


図-2 応力  $\sigma_\theta$  の角速度  $\omega$  に対する変化

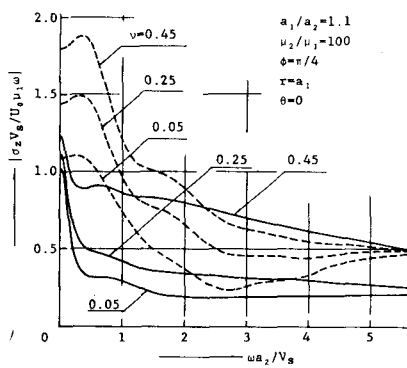


図-3 応力  $\sigma_\theta$  の角速度  $\omega$  に対する変化

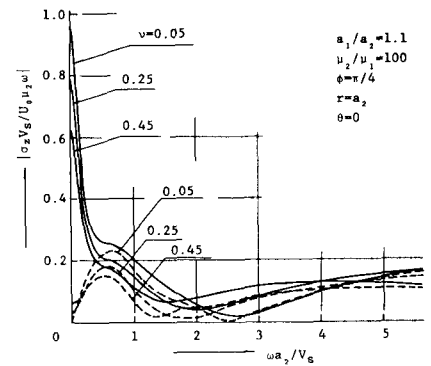
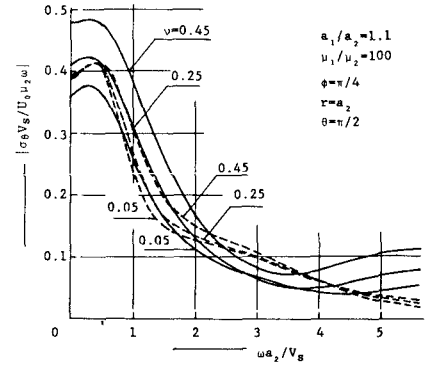


図-4

には  $r = a_2$ ， $\theta = 0$  における  $u$  の値を示した。全体として境界状態による相違や

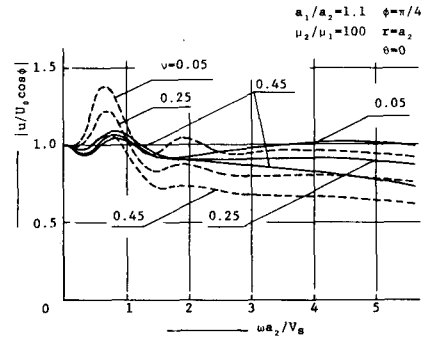


図-4 変位  $u$  の角速度  $\omega$  に対する変化

ポアソン比の影響も大きくないが，case-I，II とともにポアソン比の小さなものが大きい値を示し，case-II の方が  $\omega$  の差も大きい。また， $\omega$  の変化に対しては， $\omega = 0.6 \sim 0.8$  付近で最大値を示し，その後僅かに変動しながら減衰している。

【参考文献】 1) Rao, Y. H.; J. Appl. Mech. 29, 299, 1962, 冊・佐武; 第34回学術講演集, 第1部, 493, 1979 ほか。  
2) 松岡, 能町; 第36回学術講演集, 第1部, 225, 1981。