

川田工業(株) 正 員・佐藤 秀雄
 長崎大学工学部 学生員 田川 賢
 長崎大学工学部 正 員 高橋 和雄

1 まえがき 各種の係数励振振動系の不安定領域の決定法として、これまで Bolotin の方法や Hsu の方法が一般に使用されているが、これらの解法はいずれも十分条件のみを満足する。このために、係数励振振動系の不安定領域の合理的な計算法の確立が望まれている。そこで、著者らは固有値問題による係数励振振動系の不安定領域の決定法を提案して、各種の係数励振振動系に適用して解法の有効性を吟味してきた^(1,2)。これより、本法は係数励振振動系の不安定領域の決定法として既往の研究の不備を補う有力な方法であることが立証された。しかし、定式化の過程において各基準座標ごとに減衰の大きさが等しいという仮定を導入しているために、減衰の大きさが異なる問題に適用することができない。そこで、本研究はこの仮定を除くことを試み、若干の解の性質と自由度数に応用した結果を報告するものである⁽³⁾。

2. 解法 係数励振振動系の微分方程式は次のように表わされる。

$$\mathbb{C}\ddot{\mathbf{y}} + 2\mathbb{C}\mathbb{H}\dot{\mathbf{y}} + (\mathbb{I} - \alpha\mathbb{A})\mathbf{y} - \mathbb{E}\mathbb{B}\cos\theta t\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1) \quad \text{ここに、}\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{A}, \mathbb{B}: \text{係数行列, } \mathbb{I}: \text{単位行列, } \alpha: \text{一定荷重の大きさ, } \mathbb{E}: \text{係数励振振動系の荷重振幅, } \theta: \text{励振円振動数, } \mathbf{y}: \text{一般座標}$$

式(1)の一般解が周期 $T = (2\pi/\theta)$ または $2T$ の解を含むことを考慮して、次のように仮定する。

$$\mathbf{y} = e^{i\theta t} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{Q}_n \sin \frac{n\theta t}{2} + \mathbf{b}_n \cos \frac{n\theta t}{2} \right) \right\} \quad (2) \quad \text{ここに、}\mathbf{b}_0, \mathbf{Q}_n, \mathbf{b}_n: \text{時間に無関係なベクトル}$$

式(2)を式(1)に代入して調和バランス法を適用すれば、次の2組の同次方程式が得られる。

$$\begin{cases} (\lambda^2 \mathbb{C} + 2\lambda \mathbb{C}\mathbb{H} + \mathbb{I} - \alpha\mathbb{A})\mathbf{b}_0 - \mathbb{E}\mathbb{B}\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}, \\ (\lambda^2 \mathbb{C} + 2\lambda \mathbb{C}\mathbb{H} + \mathbb{I} - \alpha\mathbb{A} - \eta^2 \mathbb{C}^2/4)\mathbf{b}_n - \mathbb{E}\mathbb{B}(\mathbf{b}_{n-2} + \mathbf{b}_{n+2})/2 + \eta\theta(\mathbb{C}\mathbb{H} + \lambda\mathbb{C})\mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \\ (\lambda^2 \mathbb{C} + 2\lambda \mathbb{C}\mathbb{H} + \mathbb{I} - \alpha\mathbb{A} - \eta^2 \mathbb{C}^2/4)\mathbf{Q}_n - \mathbb{E}\mathbb{B}(\mathbf{Q}_{n-2} + \mathbf{Q}_{n+2})/2 - \eta\theta(\mathbb{C}\mathbb{H} + \lambda\mathbb{C})\mathbf{b}_n = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3) \quad \text{周期 } T \text{ に対する同次方程式}$$

$$\begin{cases} (\lambda^2 \mathbb{C} + 2\lambda \mathbb{C}\mathbb{H} + \mathbb{I} - \alpha\mathbb{A} - \theta^2 \mathbb{C}^2/4 - \mathbb{E}\mathbb{B}/2)\mathbf{b}_1 - \mathbb{E}\mathbb{B}\mathbf{b}_3/2 + \theta(\mathbb{C}\mathbb{H} + \lambda\mathbb{C})\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}, \quad \eta = 2, 4, 6, \dots \\ (\lambda^2 \mathbb{C} + 2\lambda \mathbb{C}\mathbb{H} + \mathbb{I} - \alpha\mathbb{A} - \eta^2 \mathbb{C}^2/4)\mathbf{b}_n - \mathbb{E}\mathbb{B}(\mathbf{b}_{n-2} + \mathbf{b}_{n+2})/2 + \eta\theta(\mathbb{C}\mathbb{H} + \lambda\mathbb{C})\mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \\ (\lambda^2 \mathbb{C} + 2\lambda \mathbb{C}\mathbb{H} + \mathbb{I} - \alpha\mathbb{A} - \theta^2 \mathbb{C}^2/4 + \mathbb{E}\mathbb{B}/2)\mathbf{Q}_1 - \mathbb{E}\mathbb{B}\mathbf{Q}_3/2 - \theta(\mathbb{C}\mathbb{H} + \lambda\mathbb{C})\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}, \\ (\lambda^2 \mathbb{C} + 2\lambda \mathbb{C}\mathbb{H} + \mathbb{I} - \alpha\mathbb{A} - \eta^2 \mathbb{C}^2/4)\mathbf{Q}_n - \mathbb{E}\mathbb{B}(\mathbf{Q}_{n-2} + \mathbf{Q}_{n+2})/2 - \eta\theta(\mathbb{C}\mathbb{H} + \lambda\mathbb{C})\mathbf{b}_n = \mathbf{0}, \quad \eta = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (4) \quad \text{周期 } 2T \text{ に対する同次方程式}$$

Table 1 Eigenvalues λ of the undamped case for the first and second stability boundaries when $\epsilon=0.5$

式(3), (4)は次のように行列表示される。

$$(\mathbf{M}_0 - \lambda \mathbf{M}_1 - \lambda^2 \mathbf{M}_2)\mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

式(5)は2倍サイズの固有値問題に変換することができる。式(1)に含まれるパラメータを θ に対して、算定された固有値の実数部がすべて負なら安定、逆に一つでも正ならば、不安定という Liapunov の安定性の定義を用いて安定性を検討することができる。

3. 解の性質 次の1自由度系の Mathieu の方

程式を対象に解の性質を明らかにする。

$$\ddot{f} + 2\beta\Omega\dot{f} + \Omega^2(1 - 2\epsilon\cos\theta t)f = 0 \quad (6)$$

$$\text{ここに、}\beta = \xi/\Omega, \quad \bar{\omega} = \Omega/\theta$$

式(6)は文献1に示すような不安定領域を有する

boundary name	$\bar{\omega}$	stable or unstable	period T		period 2T	
			Re(λ)	Im(λ)	Re(λ)	Im(λ)
$S_{1/2}$	2.4656	stable	0.0	1.23639	0.0	2.46919
	2.4655	unstable	0.00338	1.23275	0.00338	0.0
$C_{3/2}$	1.4592	stable	0.0	3.65470	0.0	4.38430
	1.4593	unstable	0.00411	3.65770	0.00411	4.38735
S_1	1.0375	stable	0.0	0.00365	0.0	0.52239
	1.0374	unstable	0.00365	0.0	0.00366	0.51870
C_1	0.7651	stable	0.0	1.56350	0.0	1.94605
	0.7652	unstable	0.00440	1.56094	0.00440	1.94354

Table 2 Eigenvalues λ of the damped case for the first and second stability boundaries when $\epsilon=0.5$

boundary name	$\bar{\omega}$	present solution		preceding solution	
		Im(λ)	Re(λ)	Im(λ)	Re(λ)-h
$S_{1/2}$	2.4531	1.22655	0.00015	1.22655	0.05015
$C_{3/2}$	1.2664	3.67546	0.00019	3.67546	0.05019
S_1	1.0265	0.0	0.00006	0.0	0.05006
C_1	0.7727	1.57593	0.00008	1.57593	0.05013

が図中の第1不安定領域の境界線($S_{1/2}, C_{1/2}$)は周期2Tの解をもち、第2不安定領域の境界線(S_1, C_1)は周期Tの解をもち、非減衰($R=0.0$)の場合の第1($S_{1/2}, C_{1/2}$)、第2(S_1, C_1)の不安定領域の固有値のうち、実数部をもつ場合を示せば、Table 1に示すとおりである。これより、(a)周期T(式(3))と周期2T(式(4))は同じ境界線を与える。(b)周期Tと周期2Tの固有値の実数部は同じである。 $Re^{2T}(\lambda) = Re^T(\lambda)$ (7) (c)周期Tと周期2Tの固有値の虚数部には次の関係が成立する。 $Im^{2T}(\lambda) = Im^T(\lambda) \pm \frac{\bar{\omega}}{2}$ (8)

以上の(a)~(c)より、本題に対してFourier級数の周期Tおよび2Tのいずれでもよい。

減衰定数 $R=0.05$ の場合に対して本法と式(1)を $\bar{\omega} = e^{-\gamma t}$ なる行列変換を用いて標準形になおす方法との固有値の比較を示せば、Table 2に示すとおりである。これより、本法と前報の方法とは全く同一の境界線を与え、次のような関係が成り立つ。(d) $Re^{pre}(\lambda) = Re^{for}(\lambda) - R$, $Im^{pre}(\lambda) = Im^{for}(\lambda)$ (9)

4. 99自由度系の係数励振振動

99自由度系の係数励振振動の例として、次ののはりの曲げ、ねじりの動的安定問題を考える。

$$\bar{\omega}^2 \Pi \bar{\eta} + \bar{\omega} ID \bar{\eta} + (IK + IF \cos \tau) \bar{\eta} = 0 \quad (10)$$

$$\text{ここに } \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, ID = \begin{bmatrix} 2R_1 \bar{\omega} & 0 \\ 0 & 2R_2 \bar{\omega} \end{bmatrix},$$

$$IK = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \mu \\ -\mu & 1 \end{bmatrix}, IF = \begin{bmatrix} 0 & -2\delta \varepsilon \\ -2\varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\omega} = \omega/\omega_2, \gamma = (\omega_1/\omega_2)^2, R_1 = \xi_1/\omega_1, R_2 = \xi_2/\omega_2,$$

$$\bar{\omega}, \varepsilon: \text{パラメータ } \gamma=0.1, \delta=0.5$$

の場合に対して、固有振動数 ω_1, ω_2 はそれぞれ0.270と1.015である。

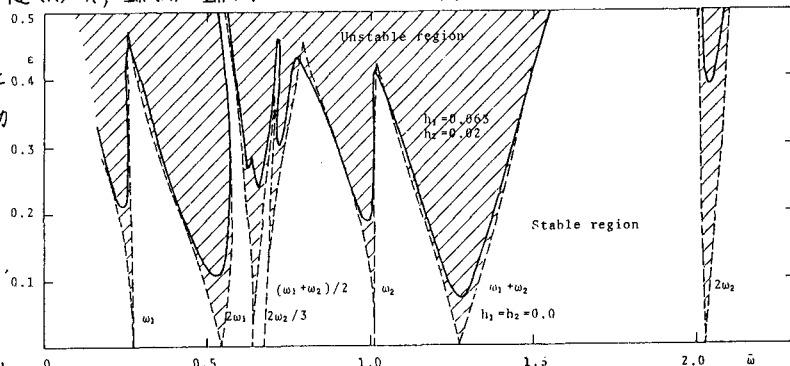
式(10)の不安定領域を示せば、Fig. 1, 2に示すとおりである。Fig. 1, 2において、減衰定数 R_1, R_2 は次の2ケースである。Fig. 1: $R_2=0.02, R_1=0.063$ ($\xi_1=\xi_2$, 等しい減衰), Fig. 2: $R_2=0.02, R_1=0.01$ ($\xi_1 < \xi_2$)

前報の方法では、Fig. 1の結果が得られるが、これらについては両者が

完全に一致している。減衰の効果はFig. 1の $\xi_1=\xi_2$ の場合には単純共振($\bar{\omega}=2\omega_1/\omega_2$)および結合共振($\bar{\omega}=(\omega_1+\omega_2)/\omega_2$)の不安定領域を減少させる。しかし、Fig. 2の減衰の大きさが異なる場合にはこの事実は必ずしも成立しない。Fig. 2の $\bar{\omega}=(\omega_1+\omega_2)$ 付近の結合共振の不安定領域は減衰のある場合の方がない場合よりも広がっている。この不安定領域は ξ_1/ξ_2 の大きさが減少するにつれて広がるものである。この減衰による脱安定化効果はSchmidt⁴⁾によって発見されたものであるが、本法によっても得られている。

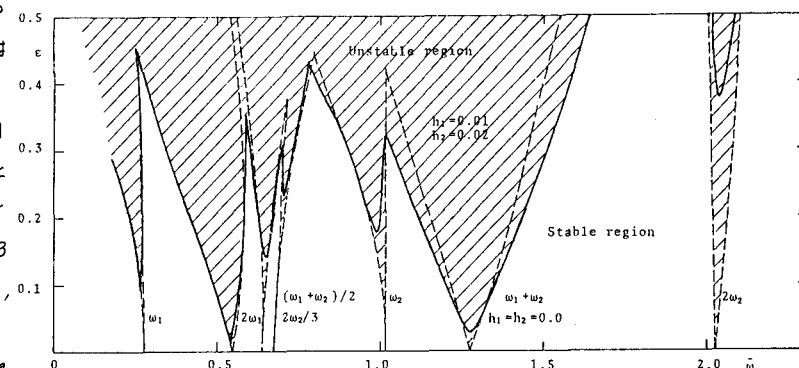
5. まとめ 以上によって係数励振振動系の不安定領域の決定法をより一般化することができた。本研究はMITのJ. Dugundji教授の指導によるものであり、ソ連科学アカデミーのV.V. Bolotinのお世話になったことを付記する。

参考文献 1) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration, Vol. 78, 1981, 2) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration, Vol. 79, 1981, 3) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration, Vol. 83, 1982 (to appear), 4) Schmidt, G. and Weidenhammer, F.: Mathematischen Nachrichten, Vol. 23, 1981



Regions of parametric instability for coupled Mathieu equations: $h_1=0.063, h_2=0.02$

Fig. 1



Regions of parametric instability for coupled Mathieu equations: $h_1=0.01, h_2=0.02$

Fig. 2