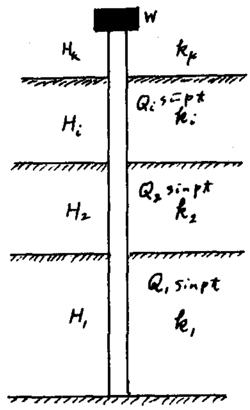
# I-210　層状地盤内におけるたて坑の強制振動

信州大学　正員　夏目正太郎
〃　　　正員　石川清志

## 1. まえがき

たて坑が水平な層状地盤を貫抜いて埋設され、頂点に集中質量を有し、地盤から水平方向の強制振動外力が作用したとき、たわみ振動モード、モーメントやせん断力が、時間の経過に伴って変化する状態を調べるものである。中空状態のものばかりでなく、たて坑が、原子力発電所などの冷却水を通す目的に利用されれば、水位の高低が振動性状に影響を与えるであろう。

水平に置かれた棒ならば、各断面の自重は断面の高さがそれ程高くないので上端と下端での大きさは余り影響はないが、たて坑となると自重の断面に及ぼす影響は無視出来ない。またたて坑の大部分が地盤内にあるので、このたて坑は、弾性床上のハリの解析をすべきで、弾性地盤のバネはウィンクラーのバネ常数を想定し、層毎にバネ常数を変えてその性質の違いをあらわすことにしておく。




たて坑の常数
$EI,\ \gamma,\ A,\ L$

## 2. 解析式

弾性地盤上のハリの強制振動の微分方程式は

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw = Q\sin pt \qquad (1)$$

となる。この解の$w$は、同次解と特殊解との和であらはし

$$w = w_h + w_p \qquad (2)$$

とすれば(1)は2つの微分方程式となる。すなわち

$$EI\frac{\partial^4 w_h}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w_h}{\partial t^2} + kw_h = 0 \qquad (3)$$

$$EI\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} + kw_p = Q\sin pt \qquad (4)$$

となる。(3)からは同次解が得られ、(4)から特殊解を得る。この(4)の右辺を0とおくと(3)と全く同じ形になる。そして右辺の外力の項は、荷重マトリクス」として扱うことにする[1]。(3)または(4)の解であるが

$$w_h = e^{\lambda\rho}e^{i\omega t} \qquad (5)$$

としたとき、円振動数$\omega$とバネ常数$k$との間に大小関係を生じ、3種類の解を用意しなければならない。

(i) $\frac{-\omega^2\gamma A}{g} + k > 0$ の場合　$\nu = \sqrt[4]{\left(k - \frac{\omega^2\gamma A}{g}\right)/EI}\cdot L$

$$w = \lfloor \cosh\nu\rho\cos\nu\rho\quad \sinh\nu\rho\cos\nu\rho\quad \cosh\nu\rho\sin\nu\rho\quad \sinh\nu\rho\sin\nu\rho \rfloor N e^{i\omega t} \qquad (6)$$

(ii) $\frac{\omega^2\gamma A}{g} - k \geq 0$ の場合　$\nu = \sqrt[4]{\left(\frac{\omega^2\gamma A}{g} - k\right)/EI}\cdot L$

$$w = \lfloor \cos\nu\rho\quad \sin\nu\rho\quad \cosh\nu\rho\quad \sinh\nu\rho \rfloor N e^{i\omega t} \qquad (7)$$

(iii) $\frac{\omega^2\gamma A}{g} - k = 0$ の場合　$\nu = 0$

$$w = \lfloor 1\quad \rho\quad \rho^2\quad \rho^3 \rfloor N e^{i\omega t} \qquad (8)$$

たわみ式が得られたのでこれからたわみ振動における状態量をもとめることが出来る。

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\rho} \\ -\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} \\ -\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^3}{\partial\rho^3} \end{bmatrix} w\, e^{i\omega t} \qquad (9)$$

## 3. 状態量ベクトル

(9)は状態量を示すもので、同次解と特殊解のいずれにも適用される。これは3つの部分からなる。それは物理的な量と座標を示す部分と固有マトリクス$N$から出来ている。これを記号的に書けば、

$$\mathbb{W}(\rho) = \mathbb{D}\,\mathbb{R}(\rho)\,\mathbb{N}\,e^{i\omega t} \qquad (10)$$

ここで、自重と水位の影響を考慮すれば $C(1.\rho)$ が取り入れられる。[2]

$$\mathbb{W}(\rho) = \mathbb{D}\,\mathbb{R}(\rho)\,\mathbb{C}(1,\rho)\,\mathbb{N}\,e^{i\omega t} \qquad (11)$$

ここまでは、同次解と特殊解のいずれにもあてはめられるが、特殊解には、荷重マトリクスの誘導が必要である[3]

$$\mathbb{K}(Q,\rho) = \int_0^{\rho} \mathbb{C}^{-1}(1,x)\cdot\mathbb{R}^{-1}(x)\cdot\mathbb{D}^{-1}\cdot L \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Q \end{bmatrix} dx \qquad (12)$$

完全な状態ベクトルを示せば

$$\mathbb{W}_r(\rho) = \mathbb{D}_h\,\mathbb{R}_h(\rho)\cdot\mathbb{C}_h(1,\rho)\cdot\mathbb{N}_{rh}\,e^{i\omega t} + \mathbb{D}_p\,\mathbb{R}_p(\rho)\,\mathbb{C}_p(1.\rho)\left[\mathbb{N}_{rp} + \mathbb{K}_r(Q.\rho)\right]\sin pt \qquad (13)$$

となる。第1項は同次解によるものであり、第2項は特殊解であらわされるものである。この状態量をおめるには、第1項と第2項を切り離し、別個に取扱ってそれぞれ境界條件を取り入れて、未定常数である所の固有マトリクス $\mathbb{N}$ を決定する。特殊解の方は、一義的に決定されるが、同次解は一つの未定性を残し、比の値でしか得られない。これを初期條件で定める。

## 4. 境界條件と初期條件

たて坑全体を細分割し、層の接続線は分割線と一致させる。分割区間を局部座標 $\rho$ の0端と1端とで表わし、隣接区間への移行は、上部の0端と、下部の1端との間で状態量が等しいとすればよく、第1区間の固有マトリクス $\mathbb{N}_1$ ですべての区間の固有マトリクスがあらわされる。よって、底部の境界條件と、頂点の境界條件を一緒くくりにして、$\mathbb{N}_1$ をおめることになる。同次解と特殊解の移行演算式はつぎに示すように書かれる：

$$\mathbb{N}_{rh} = \mathbb{R}_r^{-1}(0)\cdot\mathbb{D}_r^{-1}\cdot\mathbb{D}_{r-1}\cdot\mathbb{R}_{r-1}(1)\cdot\mathbb{C}_{r-1}(1)\cdot\mathbb{N}'_{r-1\cdot h} = \mathbb{L}_{r-1\cdot h}\cdot\mathbb{G}_{r-1\cdot h}\mathbb{N}_{1h} = \mathbb{G}_{rh}\,\mathbb{N}_{1h} \qquad (14)$$

$$\mathbb{N}_{rp} = \mathbb{R}_r^{-1}(0)\mathbb{D}_r^{-1}\mathbb{D}_{r-1}\mathbb{R}_{r-1}(1)\mathbb{C}_{r-1}(1)\mathbb{N}'_{r-1\cdot p} = \mathbb{L}_{r-1\cdot p}\left[\mathbb{G}_{r-1\cdot p}\mathbb{N}_{1p} + \mathbb{P}_{r-1} + \mathbb{K}_r\right] = \mathbb{G}_{r\cdot p}\,\mathbb{N}_{1p} + \mathbb{P}_r \qquad (15)$$

底部境界條件 $\quad \mathbb{B}_1\mathbb{N}_1 = 0 \qquad (16)$

頂点境界條件 $\quad \mathbb{B}_L\cdot\mathbb{N}'_L = 0 \qquad (17)$

(14) を (17) へ代入し、(16) と合わせると

$$\begin{bmatrix} \mathbb{B}_{1h} \\ \mathbb{B}_{Lh}\cdot\mathbb{G}_{Lh} \end{bmatrix} \mathbb{N}_{1h} = 0 \qquad (18)$$

を得、$\mathbb{N}_{1h}$ の係数行列式をゼロと置けば、固有値方程式が得られ、円振動固有値 $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ とおめられる。(18) 式へこれら固有値を代入すれば未定常数間の比が定まるので残った1つの未定常数を改めて $\Omega$ とすれば、

$$\mathbb{N}_{1h} = \mathbb{P}_n(\omega)\,\Omega_n \qquad (19)$$

となる。つぎに (15) を (17) へ代入し、(16) と合わせると

$$\begin{bmatrix} \mathbb{B}_{1p} \\ \mathbb{B}_{Lp}\cdot\mathbb{G}_{Lp} \end{bmatrix} \mathbb{N}_{1p} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbb{B}_{Lp}(\mathbb{P}_{L-1} + \mathbb{K}_L) \end{bmatrix} \qquad (20)$$

を得、$\mathbb{N}_{1p}$ が定まる。$\mathbb{N}_{1p}$ の係数行列は、$4\times4$ のサイズでしかないので逆行列は簡単におまる。(数値的)

従って (13) は書きかえられ

$$\mathbb{W}_r(\rho) = \mathbb{D}_h\cdot\mathbb{R}_h(\rho)\mathbb{C}_h(1,\rho)\cdot\mathbb{G}_{rh}\cdot\mathbb{P}_n(\omega)\Omega_{nh}\,e^{i\omega t} + \mathbb{D}_p\cdot\mathbb{R}_p(\rho)\mathbb{C}_p(1,\rho)\left[\mathbb{G}_{rp}\mathbb{N}_{1p} + \mathbb{P}_{r-1} + \mathbb{K}_r(Q_r,\rho)\right]\sin pt \qquad (21)$$

静止状態を初期條件にすれば、たわみと速度がゼロになる。たわみ式の $\rho$ に関する部分を取り出し、改めて同次解のものを $X(\nu,\rho)$、特殊解のものを $Y(\nu,\rho)$ とし初期條件を書けば

$$\sum_n X_n(\nu,\rho)\begin{bmatrix} 1 & i \\ i\omega & -\omega \end{bmatrix}\Omega_n + Y(\nu,\rho)\begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} = 0 \qquad (22)$$

となりこれと Fourier sine 級数で展開すれば

$$\sum_m \left[\sum_n a_{mn}\,\Omega_n + P_m\right]\cdot\sin m\pi\bar{\rho} = 0 \qquad (23)$$

を得る。これが成立するためには、

$$A_{mn}\,\Omega_n + P_N = 0 \qquad (24)$$

となり、これより $\Omega_n$ が決定される。

参考文献


(1), (3) 谷本・石川共著：演算子法構造解析1. 森北出版

(2) 谷本著：マトリクス構造解析(梁の強制振動) 日刊工業