

金沢大学工学部 正員 松浦 義満
大日本土木 宮島 雅宏
金沢大学工学部 沼田 道代

1 まえがき

一般に有限長のはりには衝撃を加えたとき、はりには衝撃の直後には極めて複雑な挙動をするけれども、ある程度の時間を経過すると両端の支持条件に応じて、いわゆる *Normal mode* 法で解かれる1次、2次、3次等の整数倍の固有値で表わされる定常振動をなすに至る。何故、はりにこのような固有振動が発生するのについては納得のいく説明がなされていない。筆者らは、この問題を解明するために両端自由なはりを対象にして、はりの一端に衝撃を加えたときにはりに生ずる曲げ波(モーメント・ウェイブ)の伝播と反射について実験を行ない、発表してきた⁽¹⁾²⁾。今回は、その曲げ波の伝播と反射について理論的な計算を行ない、実験結果と比較したので、その成果を報告する。

2 実験方法および結果

実験に用いたはりには、長さ = 70cm、重量 = $29.86 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}$ 、断面の幅 = 1.20cm、断面の高さ = 3.19cm、断面2次モーメント： $I = 0.459 \text{ cm}^4$ 、弾性係数 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ の鋼製はりである。このはりを両端自由の条件が満たされるように水平に吊り下げ、はりの一端に横方向から衝撃を加えて曲げ波を発生させた。

曲げ歪の測定は図-1に示すごとく、10枚のストレイン・ゲージを5cm間隔に貼り付けて、曲げ波により生ずる歪を抵抗線動的歪測定器で増出し、それとトランジェント・コンバーターに取り込み、A/D変換した後にパーソナル・コンピュータの磁気テープに記録させるという手順で実行した。G₁とG₁₀における曲げ歪の測定結果を図-6および図-7の上部に掲げる。

また、理論計算を行なうには衝撃力の波形が与えられねばならないため、図-2に示す要領、すなわちはりの切面にストレイン・ゲージを貼り付けて衝撃作用点における衝撃力方向の歪を測定した。その結果を図-3に示す。この図から、衝撃の作用時間はおよそ150μsecであることがわかる。しかし、金づちとはりの接触時間を電圧検回路を組んで測定したところ、接触時間はおよそ760μsecであった。

3 理論計算の方法および結果

両端自由なはりの一端に衝撃を加えた場合に生ずる曲げ波が他端において反射する様相を理論的に求めることは極めて難しい。しかし、半無限はりの自由端に荷重 $P_H(t)$ が作用した際の理論解³⁾を用いることにより以下の如く求めることができる。ここに $H(t)$ はヘビーサイドの単位関数であり、 t は時間を表わす。

半無限はりの自由端に荷重 $P_H(t)$ が作用した際の剪断力 $Q_{PH}(t)$ 、曲げモーメント $M_{PH}(t)$ 、変位 $y_{PH}(t)$ はそれぞれ

$$Q_{PH}(t) = -P[1 - 2C(Z)] \quad (1)$$

$$M_{PH}(t) = -PZ[1 - 2C(Z) + \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \sin Z] \quad (2)$$

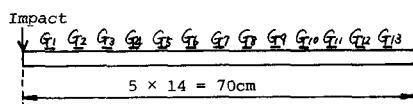


図-1 曲げ歪の測定位置

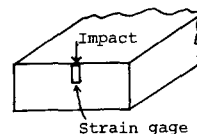


図-2 衝撃力の測定方法

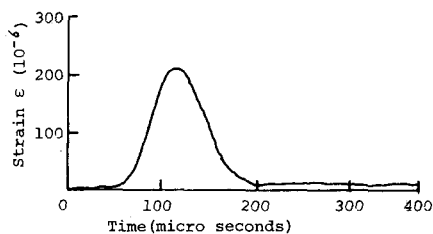


図-3 衝撃力の波形

$$y_{PH}(x) = (Px^3/6EI) [1 - 2C(Z) + (3/2Z)(2S(Z) - 1) + \sqrt{2/\pi Z} (\cos Z + Z \sin Z)] \quad (3)$$

と表わされる。こゝに

$$Z = (X^3/4t) \sqrt{\mu/EI} \quad (4)$$

X = 外力作用点からの距離 (cm)

t = 外力作用後の時間 (sec)

μ = 1はりの単位長さ当りの質量

EI = 1はりの曲げ剛性

である。また $C(Z)$, $S(Z)$ はフレスネル積分であり

$$C(Z) = \int_0^Z \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{2\pi\phi}} \quad (5)$$

$$S(Z) = \int_0^Z \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{2\pi\phi}} \quad (6)$$

と表わされる。両端自由はりの一端に衝撃力が作用して発生した曲げ波は他の自由端において、図-4に示すごとく、境界条件を満足するように反射する。

このとき、反射側の自由端には曲げモーメントと剪断力が作用して反射波を生じさせる。この反射波を求めるため、半無限はりの自由端に曲げモーメント $M_H(x)$ と剪断力 $Q_H(x)$ が作用したときの剪断力、曲げモーメントを求めると次のようになる。

$$Q_{-H}(x), Q_H(x) = M \frac{2}{Z} \sqrt{\frac{Z}{\pi}} \sin Z + Q [1 - 2C(Z)] \quad (7)$$

$$M_{-H}(x), Q_H(x) = M [2S(Z) - 1] + QX [1 - 2C(Z) + \sqrt{\frac{2}{\pi Z}} \sin Z] \quad (8)$$

上述の各式を用い、かつ図-3に示した衝撃力の波形を図-5のごとく7個の矩形波パルスに置き換えて近似的に曲げ波の伝播と反射の様相を実験結果に対応させて求めると図-6、図-7の下部の如くになる。これらの理論波形は2つの自由端において合計20回反射させたものである。また理論波形を算出するにあたって、衝撃力 P の大きさは図-6における実験値の最大値に理論値の最大値が一致するように定めた。大勢としてはよい成果が得られたと考えられる。しかし、実験における衝撃の手え方、あるいは衝撃波形の測定の手方に工夫をこらせば、更によい成果が得られるであろう。

参考文献

- 1) 山岸勇、島田俊一、松浦義満; 曲げ波の反射に関する実験的研究、第35回全国大会概要集(第1部)、1980
- 2) 羽根博之、松浦義満; 曲げ波の反射に関する実験的研究、第36回全国大会概要集(第1部)、1981
- 3) Jones, R. P. N.; The Wave Method for Solving Flexural Vibration Problems, Journal of Applied Mechanics, March, 1954

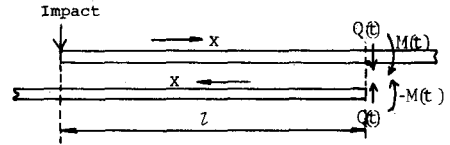
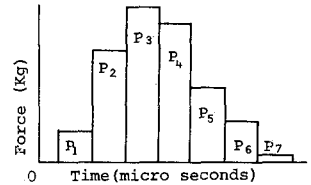


図-4 自由端における反射の条件

図-5 衝撃力の波形



MOMENT (KG*CM)

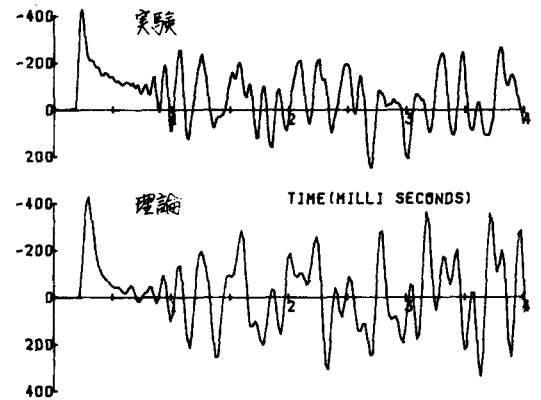


図-6 G_1 における曲げ波の理論値と実験値の比較

MOMENT (KG*CM)

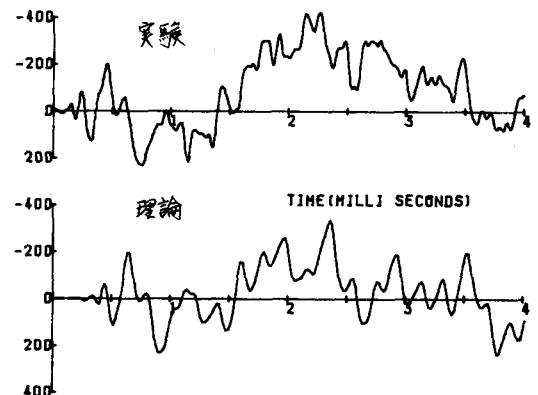


図-7 G_{101} における曲げ波の理論値と実験値の比較