I-203　弾性球による無限長はりの横衝撃について

岩手大学工学部　正員　岩崎 正二
北海道大学工学部　正員　能町 純雄

1. まえがき

落体によってはりに生じる応力あるいは変形の問題は実用上重要であり，古くから理論的あるいは実験的に多くの研究が行なわれている。古くから採用されている簡略な方法としては衝突前に落体の持っていたエネルギーが，衝突後にはりの歪エネルギーと運動エネルギーに変換されると考える方法でありCox あるいはMorley の式が使われている。しかしながら上に述べた方法は，はり中の応力波の伝播を無視して求められたものであり，はりの質量に比べて落体の質量が大きい場合には十分精密な結果を与えるがその他の場合にははりの横振動や衝撃点における局部的変形を考慮しなければならない。本報告ではこの点を考慮して無限長はりに弾性球が衝突する場合を接触点での局部的変形にHertz の理論を適用することにより，衝撃力を定める非線型積分方程式を導き解析を行なったものである。

2. 解析理論

無限長はりの中央に質量Mの弾性球が初速v_0をもって衝突する問題を考える。はりのたわみの横振動方程式は初等はり理論では下式のようになる。

$$EI\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{———(1)}$$

ここでEIははりの曲げ剛性，ρは単位体積質量，Aははりの断面積，ωはたわみを表わす。
はりと球との接触点での局部的変形はHertzの解によって与えられる。球がはりの軸線からδだけ変位し，それに対応して球が圧力Pをはりに及ぼすとするとPとδとの間には次式が成立する。

$$\delta = k P^{\frac{2}{3}} \qquad \text{——(2)}$$

ただし　$k = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16}\frac{(k_1+k_2)^2}{R}}$，　$k_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}$，　$k_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$．

ν_1, ν_2, E_1, E_2はそれぞれはりと球のポアソン比とヤング率を表わしており，Rは球の半径を表わす。また球の運動方程式は下式のように表わされる。

$$M(\ddot{\omega}_0 + \ddot{\delta}) = -P(t) \qquad \text{——(3)}$$

ただし　ω_0は衝撃点におけるたわみの値である。　$\cdot = \frac{\partial}{\partial t}$。
式(3)を解くと球の変位は次式のように表わされる。

$$\omega_0 + \delta = -\frac{1}{M}\int_0^t P(\xi)(t-\xi) + v_0 t \qquad \text{——(4)}$$

次に座標の原点$x=0$に衝撃力Pが作用するとして式(1)を解くと衝撃点$x=0$での解は下式のようになる。

$$\omega_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\rho A a}\int_0^t P(\xi)\sqrt{t-\xi}\,d\xi \qquad \text{——(5)}$$

ただし　$a = \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}}$.

式 (2) と式 (5) を式 (4) に代入するとつぎの非線型積分方程式を得る。

$$k P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho A a}\int_0^t P(\xi)\sqrt{t-\xi}\,d\xi + \frac{1}{M}\int_0^t P(\xi)(t-\xi)\,d\xi = v_0 t \quad \text{——} (6)$$

これは球とはりの衝突のときに接触面を通じて互いに作用する圧力を定める基礎方程式である。 ところではりが衝撃されると，衝撃点からまず縦波が伝播し，つづいてせん断波が伝播することはよく知られた事実であるが，このような応力波の伝播を考慮する場合には，はりの横振動方程式は回転慣性及びせん断変形を考慮して導かれたティモシェンコばりの式を使用しなければならない。

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\rho I + \frac{\rho EI}{\kappa G}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad \text{——} (7)$$

ここで κ はせん断変形に対する補正係数，G ははりのせん断弾性係数を表わす。
式 (7) を式 (1) のかわりに用いると圧力を定める基礎方程式として次式が求まる。

$$k P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{C_0}{2EA}\int_0^t P(\xi)\left\{\frac{2B}{\pi}\int_0^{\frac{1}{\eta}}\frac{\sqrt{a^2+\varepsilon^2}-\varepsilon}{\sqrt{a^2+\varepsilon^2}\cdot\varepsilon^2}\phi_4\cdot\sin^2\frac{\varepsilon C_0}{2r}(t-\xi)\,d\varepsilon + \eta\right\}d\xi + \frac{1}{M}\int_0^t P(\xi)(t-\xi)\,d\xi = v_0 t \quad \text{——} (8)$$

ここで $r = \left(\frac{I}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\eta = \frac{C_0}{C_s}$, $C_0 = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$,
$C_s = \left(\frac{\kappa G}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\phi_4 = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[N(a^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon\right]^{\frac{1}{2}}$, $B = \left(\frac{\eta^2+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $a = \frac{2}{\eta^2-1}$, $N = \frac{\eta^2-1}{\eta^2+1}$。

又ティモシエンコは長さ l の両端単純支持された初等はりと球との衝突の問題を扱ったが，この有限長はりにティモシエンコばり理論を適用すると圧力を定める基礎方程式は次式のようになる。

$$k P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{2C_s^2}{\rho A l r^2}\sum_{m=1,3,\cdots}\int_0^t \frac{P(\xi)}{n_{2m}^2 - n_{1m}^2}\left\{\frac{\sin n_{1m}(t-\xi)}{n_{1m}} - \frac{\sin n_{2m}(t-\xi)}{n_{2m}}\right\}d\xi + \frac{1}{M}\int_0^t P(\xi)(t-\xi)\,d\xi = v_0 t \quad \text{——} (9)$$

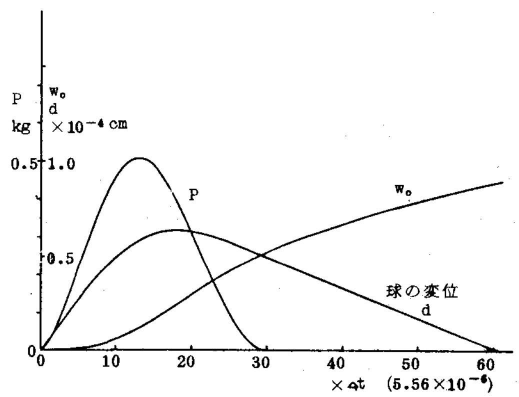
ただし

$$\left.\begin{matrix} n_{1m}^2 \\ n_{2m}^2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\left\{(C_0^2+C_s^2)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{C_s}{r}\right)^2\right\} \pm \sqrt{\left\{(C_0^2+C_s^2)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{C_s}{r}\right)^2\right\}^2 - 4C_0^2 C_s^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4}\right]$$

3. 数値計算例

数値計算は，つぎのような諸元をもつはりに同質の球が衝突した場合について行なった。

$E_1 = E_2 = 2.2\times10^6$ (kg/cm²),
$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $A = 1\times1$ (cm²),
$\rho = 0.811\times10^{-5}$ (kg·sec²/cm⁴),
$R = 1$ (cm), $M = 3.4\times10^{-5}$ (kg·sec²/cm),
$v_0 = 1$ (cm/sec), $k = 7.27\times10^{-5}$。



参考文献；チモシェンコ：工業振動学
青柳史郎：構造物における衝撃現象の数値解析，土木学会論文報告集 1972，10
小高忠男，中原一郎：弾性棒で衝撃された無限長はりの応力，日本機械学会論文集 1967，4
B. A. BOLEY, C.C. CHAO：Some Solution of the Timoshenko Beam Equation, ASCE, Vol. 22, 1955
日高孝次：応用積分方程式論