I-175　はりの横倒れ、円筒シェル、十字断面柱の弾塑性カタストロフィーについて

京都大学工学部　正　員　丹羽　義次　　京都大学工学部　正　員　渡辺　英一
愛知県県庁　正　員○鈴木　五月　　京都大学大学院　学生員　浅野　剛

1. はじめに

土木鋼構造物の多くは　弾塑性域で極限状態に達するように設計されているが、耐荷力の算定は一般に困難である。本報告では　簡略化されたモデルを用い、系の弾塑性座屈を考え、擬似ポテンシャルVを導入し、その1階微分としてのつり合式を求め、カタストロフィー理論により　系の初期不整による敏感性を簡単に求める手法について論じた。

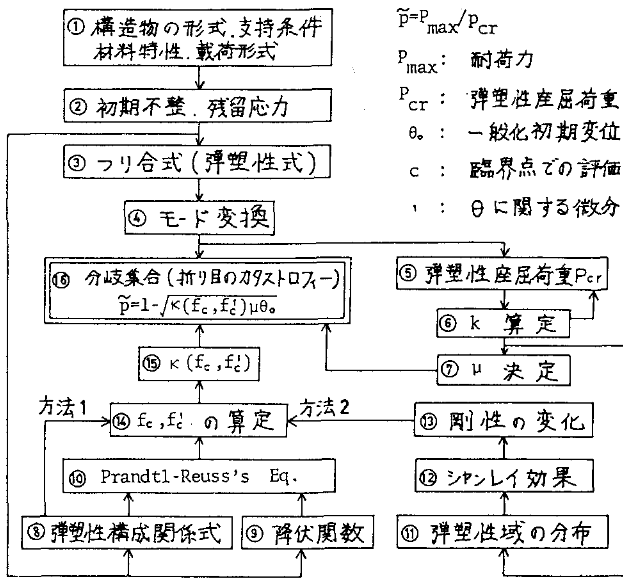

Fig.1　計算手順

2. 手法の概要

2.1 計算手順（Fig.1の①～⑯を参照）

①②：基本的条件の決定（材料は完全弾塑性体とする。）　③：弾性の場合の剛性D^eを　弾塑性域での割線剛性　$D^P=fD^e$　に換える。係数fは、臨界点からの変位の関数である。また初期不整は、弾塑性域でも合理的に評価すべく、係数μで修正する。μは、一般化細長比λ、残留応力σ_r、全断面に対する弾性部分の割合k_e、の関数である。　④：変位、初期変位に対して　同じモード変換をして、つり合式を一般化変位θ、一般化初期変位θ_0、で表わす。　⑤⑥：$\partial^2V/\partial\theta^2|_c=0$　と、弾塑性状態の断面力のつり合式より　P_{cr}と　k_e　が求まる。⑦：μは降伏応力σ_yで無次元化された最大圧縮残留応力　$\tilde{\sigma}_r=\sigma_r/\sigma_y$　を用い　次のように決める。

$$\mu=\begin{cases}\lambda^2\{\tilde{\sigma}_r+k_e(1-2\tilde{\sigma}_r)\} & \text{for } \lambda<\lambda_c\\ 1 \quad \text{for } \lambda\geq\lambda_c & \lambda_c=(1-\tilde{\sigma}_r)^{-1/2}\end{cases} \quad (1)$$

⑧⑨⑩⑭⑮（κの求め方1）：断面力による弾性構成関係式と断面の崩壊に関する相関関係式（降伏関数）を決定し、弾塑性構成関係式を　Prandtl-Reuss's Eq.より求める。次にfを弾塑性と弾性の面外方向に対応する剛性の比として定義する。fは直接的には断面力の関数であり、また構成関係式を通じてθの関数となる。　⑪⑫⑬⑭⑮（κの求め方2）：断面の弾塑性域の分布を調べる。そして座屈が、Shanley　的な応力増加の分布を伴って起こるとして、座屈直後の断面の剛性変化を幾何学的にとらえて　$f_c, f_c'(=\partial f/\partial\theta|_c)$を求める。　⑯　面外方向の断面力と対応するひずみの関係が　指数関数的であるという仮定、又はカタストロフィー理論から　fの展開式は　$f=f_c+\frac{1}{2}f_c'\theta$　なる展開となる。これより一般的に　$\partial^3V/\partial\theta^3|_c\neq0$　となり「折り目」のカタストロフィーになる。⑮までにκ，μが評価されているから、分岐集合を求めることができる。

2.2 計算例

純曲げを受けて両端がねじれに対して単純支持されているI型梁の横倒れのカタストロフィーを考える。残留応力はフランジについてのみ考え、分布はFig.2に示す。まず、つり合い式を決定する。そりねじれ剛性　EC_wがサンブナンのねじれ剛性よりかなり大きい場合には、つり合い式はϕをねじれ角として

$$f E C_w^e (\partial^4 \phi_e / \partial z^4) - M_x^2 \phi / E I_y^e = 0 \tag{2}$$

となる。ただし添字 e は弾性を表す。またモード変換 $\phi = \theta \sin(\pi z/\ell)$ より上式は以下のようになる。

$$V_I \equiv \frac{\partial V}{\partial \theta} = f E C_w^e (\pi/\ell)^4 \theta_e - M_x^2 \theta / E I_y^e = 0 \tag{2'}$$

このカタストロフィーは、$\partial^3 V/\partial\theta^3|_c = (\partial f/\partial\theta)_c E C_w^e (\pi/\ell)^4 \neq 0$ より「折り目」のカタストロフィーとなり、分岐集合は、下式となる。

$$(M_x/M_{cr})^2 = 1 - \sqrt{2K\mu\theta_0} \quad ; \quad K = -\frac{\partial f}{\partial \theta}\Big|_c \Big/ f_c \tag{3}$$

次に、弾性構成方程式を下式のとおりとする。

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} M_x/M_{xp} \\ M_y/M_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/2\sigma_y & 0 \\ 0 & E/3\sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h\phi_x \\ b\phi_y \end{bmatrix} = \mathbb{D}^e \begin{bmatrix} h\phi_x \\ b\phi_y \end{bmatrix} \tag{4}$$

M_{xp}, M_{yp} は x、y 軸回り全断面塑性モーメント、ϕ_x, ϕ_y は M_x, M_y に対応する曲率である。さらに降伏関数を

$$F \equiv m_x^2 + m_y^2 - 1 \tag{5}$$

とすれば、Prandtl-Reuss's Eq. より弾塑性剛性 matrix $\mathbb{D}^P$ が求められる。いま $f = D_{22}^P / D_{22}^e$ とする。D_{22}^P, D_{22}^e は $\mathbb{D}^P$ $\mathbb{D}^e$ の(2.2)要素。また f の θ に関する微分は、

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial m_x}\left[\frac{\partial m_x}{\partial h\phi_x}\frac{\partial h\phi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial m_x}{\partial b\phi_y}\frac{\partial b\phi_y}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial f}{\partial m_y}\left[\frac{\partial m_y}{\partial h\phi_x}\frac{\partial h\phi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial m_y}{\partial b\phi_y}\frac{\partial b\phi_y}{\partial \theta}\right] \tag{6}$$

より求められる。以上により K は次式となり

$$K \equiv -\frac{f_c'}{f_c} = 6(1 - m_x)^{1/2} m_x \cdot h / \{ b (1 + \tfrac{1}{2} m_x^2)^2 \} \tag{7}$$

μ は 2.1 で定義した通りである。したがって 式(3)が評価される。

円筒シェルの場合、(2')に対応する式として Donnell の式を $w = h\theta \sin(m\pi x/\ell)$ によりモード変換した(8)式を用いる。h は板厚、ℓ は円筒シェルの高さ、N_x は単位長さの軸方向圧縮力、$D^e = Eh^3/12(1-\nu^2)$、a は半径である。また一般化初期変位を θ_0、一般化弾性変位を θ^e とすると $\theta = \theta^e + \mu\theta_0$ である。

$$V_I \equiv \frac{\partial V}{\partial \theta} = \left[f \frac{D^e}{h}\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 + \frac{E}{a^2}\left(\frac{\ell}{m\pi}\right)^2 \right] \theta^e - \frac{N_x}{h}\theta = 0 \tag{8}$$

このとき分岐集合は下式となる。

$$\sigma/\sigma_{cr} = 1 - \sqrt{2K\mu\theta_0} \tag{9}$$

μ は(1)において $\lambda \equiv \sqrt{a\sigma_Y / Eh \cdot \sqrt{3(1-\nu^2)}}$、$k = k^*$（全円周に対する弾性部分の長さの比）として評価し、K はつり合い式と、Shanley 効果を考慮した断面の負荷状態より求めた。Fig. 3~5 に I 型梁、十字断面柱、円筒シェルの分岐集合をそれぞれ示す(∘印：実験値)。

解析の結論として、弾塑性座屈は「折り目」のカタストロフィーとなり、分岐集合は通常のつり合式の再評価である程度算定できる。

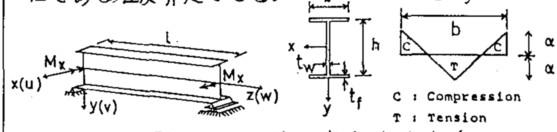

Fig.2 I型梁の形状と残留応力分布

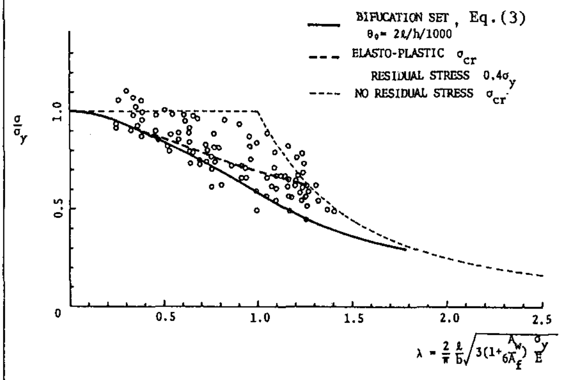

Fig. 3 Bifucation Set and Beam Test Data in the NDSS System

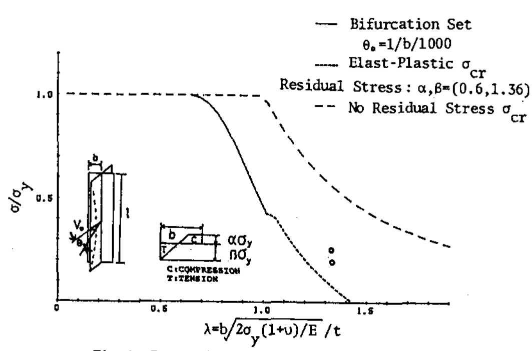

Fig.4 Strength Curve for Cruciform Columns

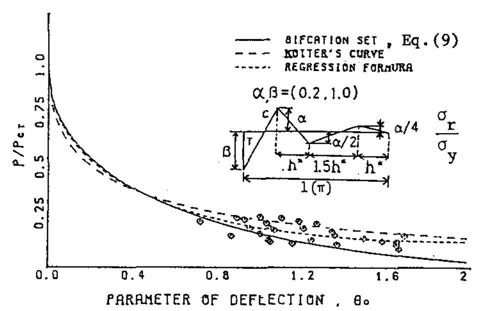

Fig.5 .IMPERFECTION SENSETIVITY OF CYLINDRICAL SHELLS