

I-167 薄肉らせんばりの折れ線近似による解析の妥当性

三菱重工業	正員	市山 裕之
早稲田大学	正員	平嶋 政治
早稲田大学	正員	依田 照彦

[1] はじめ

通常、薄肉空間曲線ばりの設計においては、空間曲線部材を直線部材の集合に置き換えるという手法が用いられている。本報告では、この折れ線近似モデルによる解析の妥当性を、一次元棒理論の立場から、一軸対称II型断面を有する薄肉らせんばりを例にとり、検討した。

まず、折れ線近似モデルの要素剛性マトリックスと座標変換マトリックスより作成された節点における支配方程式が、折れ線近似モデルの要素数を無限大にしたとき、薄肉らせんばりのフリ合いの支配方程式に一致するかどうかを調べた。次に、固有値問題を介して得られた薄肉らせんばりの支配方程式の厳密解を基礎に、数値計算を行い、折れ線近似モデルより得られた支配方程式と薄肉らせんばりの支配方程式との差異は、数値的には無視しうることを明らかにした。

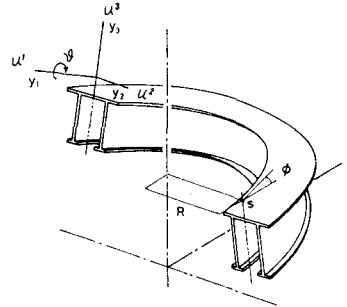


図1 薄肉らせんばりの全体図および座標系

[2] 折れ線近似の薄肉らせんばりの支配方程式への収束

本報告の折れ線近似モデルでは、剛性マトリックスを簡単にするために、一軸対称II型断面の直線部材のせん断中心軸を解析軸(部材軸)とした。このとき、曲げとねじりは連成せず、断面定数 $\bar{J}_x, \bar{J}_{xy}, \bar{J}_{yz}$ 〔ただし、()は直線部材のときの値を示す。〕は値を持たない。そのため、分布荷重が載荷されていない場合の、主座標系にちけるフリ合い方程式を用いて、直接的に要素剛性マトリックスが誘導できる¹⁾。また、個々の要素剛性マトリックスを重ね合わせて、全体剛性マトリックスを作成する際、 $\bar{y}_0$ 軸がらせんばりの円柱座標系の基準断面に平行になるように、個々の要素剛性マトリックスに座標変換を施した。この結果、近似的にはあるが、部材軸の捻率が折れ線近似モデルに導入される。

折れ線近似モデルによる直接剛性方程式の薄肉らせんばりの支配方程式への収束を確かめる手法の概要は次のようである。まず、隣接要素に対して節点力および節点変位の連続をはかるため、折れ線近似モデルにおける基準座標系を部材軸方向座標系 (θ, y, y_0) とし、要素剛性マトリックスに座標変換を施す。さらに、折れ線近似モデルの中で外力の作用しない節点に注目すれば、その節点での支配方程式は、その節点を共有する2つの隣接要素の剛性方程式を用いて作成することかできる²⁾。そこで、変位ベクトル $u = [u^1, u^2, u^3, \vartheta, -u_{\theta}^1, u_{\theta}^2, \vartheta_0]^T$ 〔ただし、()は θ に関する微分を示す。〕を、その節点回りでTaylor展開し、隣接要素間の部材軸線長の Δ を乗の順に各支配方程式を整理すると、変位ベクトルの個数に応じて7個の支配方程式が求まる。得られた7個の式を、一次元棒理論の変位の自由度が4であることに着目し、式の縮約を行い、分割数を無限大にすると、4個の独立な支配方程式が得られる。

以上のようにして得られた4個の支配方程式と薄肉らせんばりのフリ合いの支配方程式とを比較すると、若干の差異は認められるものの、主たる項は一致することが判明した。ここでは、簡単な例として薄肉II型断面らせんばりの捻率を零とした場合の、円弧ばりの曲げねじり問題に関する支配方程式を具体的に示す。折れ線近似モデルによる解析では、支配方程式は

$$E \bar{J}_x u_{,111}^1 - k E \bar{J}_x u_{,11}^2 - E \bar{J}_{xy} u_{,111}^3 + k^2 G \bar{J}_T u_{,11}^3 - k E \bar{J}_{\omega\omega} \vartheta_{,111} + [k E \bar{J}_{yx} + k G \bar{J}_T] \vartheta_{,11} = 0, \quad (1.a)$$

$$-kE\dot{J}_y\dot{U}_{,1}^3 + k^2E\dot{J}_y\dot{U}_{,11}^2 - kE\dot{J}_{\omega\omega}\dot{U}_{,1111}^3 + [kE\dot{J}_{yy} + kG\dot{J}_T - k^3E\dot{J}_{\omega\omega}]U_{,11}^3 - E\dot{J}_{\omega\omega}\dot{U}_{,1111} + G\dot{J}_T\dot{U}_{,11} - k^2E\dot{J}_{yy}\dot{U}_{,11}^3 = 0 \quad (1.b)$$

となり、一次無撓理論による薄肉円弧ばりのフリの合いの支配方程式は

$$EJ_y U_{,111}^3 - kEJ_y U_{,11}^2 - [EJ_{yy} + k^2EJ_{\omega\omega}]U_{,111}^3 + k^2GJ_T U_{,11}^3 - kEJ_{\omega\omega}U_{,1111} + [kEJ_{yy} + kGJ_T]U_{,11}^3 = 0 \quad (2.a)$$

$$-kEJ_y U_{,11}^3 + k^2EJ_y U_{,11}^2 - kEJ_{\omega\omega}U_{,1111} + [kEJ_{yy} + kGJ_T]U_{,11}^3 - E\dot{J}_{\omega\omega}\dot{U}_{,1111} + G\dot{J}_T\dot{U}_{,11} - k^2E\dot{J}_{yy}\dot{U}_{,11}^3 = 0 \quad (2.b)$$

となる。ここに、 k は曲率、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数であり、下線を引いた部分に差異が見られる。しかしながら、この差異は、通常の円弧ばりでは、数値的に小さいことが知られている。^{2),3)}

[3] 厳密解と近似解の比較

薄肉らせんばりの変位成分表示のフリの合いの支配方程式は、4元14階の連立定数係数微分方程式となる。⁴⁾ この微分方程式の解を求める際、一般には、代数方程式の根として、特性根を求める方法が用いられているが、ここでは特性根を固有値問題の固有値として求め、さらに固有ベクトルを用いて、係数間の関係式を求めた。⁵⁾

このようにして得られた厳密解を基礎に、図1に示した一軸対称薄肉II型断面を有する、部材長 $l = 31.90\text{ m}$ 、平面曲線半径 $R = 20\text{ m}$ 、ビッチ角 $\theta = 6^\circ$ の両端固定らせんばりを使用して、数値計算を行った。ここに、II型断面の諸寸法としては図2に示した値を用い、材料定数をヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.30$ とした。

数値計算の結果、ここで用いた薄肉らせんばりの断面定数は直線部材の値とはほぼ一致すること、および、両端固定ばりの場合には10要素の折れ線近似モデルで十分な近似解が得られることが判明した。

さらに、折れ線近似モデルが薄肉らせんばりの力学的挙動を捉えているかどうかを調べるために、両端固定ばりの中央点のせん断中心 S に鉛直荷重 1 t を載荷させた。その結果の一部である変位 U_1 、 U_2 、 U_3 の変化の様子を図3～5に示す。なお、図中の縦軸は変位を、横軸は着目点の上方の固定端からの無次元化した距離 ξ を、それぞれ表わし、曲線は厳密解を、プロットは10要素折れ線近似モデルの近似解を表わす。図から分るように、厳密解と近似解との間には良い一致が見られ、[2]節で述べた支配方程式の差異は、数値的には無視しうることが確かめられた。

なお、数値計算は東京大学大型計算機センターのM-200Hを使用して行い、固有値問題の解は数値計算副プログラムライブラリーMSL IIのうちDEF1Mを用いて求めた。

参考文献

- 1) V.Z. Vlasov: 薄肉弾性ばりの理論、奥村他共訳、校報堂、1967.
- 2) 鈴木・上野・西野: 第26回構造工学シンポジウム講演論文集、1980.2.
- 3) 布山・依田・平嶋: 第31回応用力学連合講演会講演論文抄録集、1981.11.
- 4) 恵谷・平嶋: 土木学会論文報告集、No. 281、1979.1.
- 5) 井浦雅司: 日本建築学会大会学術講演梗概集、1981.9.

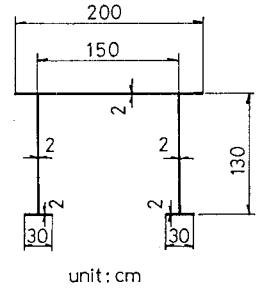


図2 II型断面の寸法

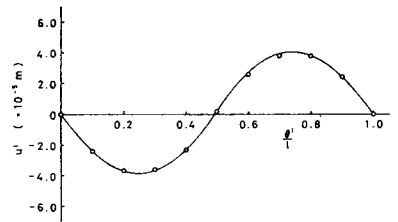


図3 鉛直荷重による U_1 方向変位 U_1

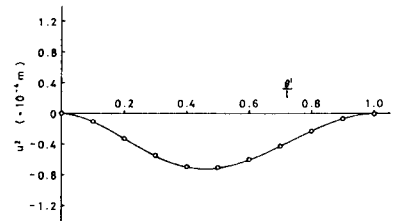


図4 鉛直荷重による U_2 方向変位 U_2

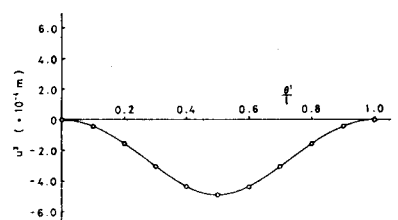


図5 鉛直荷重による U_3 方向変位 U_3