

北見工業大学 正員 奥村 勇

北見工業大学 正員 尾中孝美

櫻田機械工業 工藤智紀

1. まえがき 軸対称問題としての中実球, 厚肉球殻及び無限体中の球からの第1種及び第2種境界値問題は, 3次元弾性論の書物において良く見受けられる所であるが, 厚肉球殻の混合境界値問題の1つであるスタンプの解析は, あまり見受けられないようである。本研究は, 厚肉球殻の外表面の一部が変位成分によって規定され, 他の部分及び内表面が応力成分によって規定されたスタンプの解析を近似解法により行ったものである。ここで用いた近似解法は, 厚肉球殻の内表面における境界条件及び内部の変位場・応力場は, 3次元弾性解により厳密に満たされ, 外表面のスタンプの境界条件のみが近似的に満たされる一半解析方法である。前回は, 同じ手法により, 中実球のスタンプの解析について報告したが, 今回は, それを厚肉球殻のスタンプの解析に発展させたものである。

2. 線荷重を受けた時の解 厚肉球殻の内表面 ($r=R_1$) には外力が作用せず, 外表面 ($r=R_2$) の $\theta=\theta_1$ と $\theta=\pi-\theta_1$ との円周上に2個の線直荷重 P_1 と線せん断荷重 $\pm P_2 \sin \theta$ とが作用した時の解は, たとえば次のように表わされる。

$$2Gu_r = \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-1} n A_n P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} (n+1)(n-2+4\nu) E_n P_n(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+2)} D_n (n+1) P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} C_n \pi \cdot (\pi+3-4\nu) P_n(\mu) - 2(1-2\nu) E_0 r - D_0/r^2 ;$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} n(n-1) A_n P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (n+1)(n^2-n-2-2\nu) E_n P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+3)} D_n (n+1)(n+2) P_n(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-(n+1)} C_n n (n^2+3n-2\nu) P_n(\mu) - 2(1+\nu) E_0 + 2D_0/r^2 \dots \dots \dots (1)$$

ここで, G 及び ν は, それぞれ, せん断弾性係数及びポアソン比を表わすものとし, また, $\mu \equiv \cos \theta$ である。上式に含まれる未定定数は, たとえば, 次の通りである。

$$E_n = G \sin \theta_1 / (\Delta n R_2^n) \{ \bar{P}_1 (2n+1) P_n(\cos \theta_1) [\gamma_n (2n+1) (\rho^{2-n} - \rho^{n+1}) + n(\gamma_n + \kappa_n) (\rho^{n+3} - \rho^{2-n})] + \bar{P}_2 \cdot n [P_{n-1}(\cos \theta_1) - P_{n+1}(\cos \theta_1)] [\kappa_n (2n+1) (\rho^{2-n} - \rho^{n+1}) + (n+1) (\gamma_n + \kappa_n) (\rho^{n+3} - \rho^{2-n})] \} ;$$

$$C_n = G R_1^{n+1} \sin \theta_1 / \Delta n \{ \bar{P}_1 (2n+1) P_n(\cos \theta_1) [\delta_n (2n+1) (1-\rho^2) + \{ (n+1) \zeta_n - n \delta_n \} (\rho^{2n+3} - \rho^2)] + \bar{P}_2 \cdot (n+1) [P_{n-1}(\cos \theta_1) - P_{n+1}(\cos \theta_1)] [\{ (n+1) \zeta_n - n \delta_n \} (\rho^{2n+3} - \rho^2) - \zeta_n (2n+1) (1-\rho^2)] \} ;$$

$$E_0 = -G \bar{P}_1 \sin \theta_1 / \{ 2(1+\nu) (\rho^3 - 1) \} ; D_0 = -G R_1^3 \bar{P}_1 \sin \theta_1 / \{ 2(\rho^3 - 1) \} \dots \dots \dots (2)$$

ここで, $\bar{P}_1 = P_1 / (G R_2)$; $\bar{P}_2 = P_2 / (G R_2)$; $\rho = R_1 / R_2$; $\gamma_n = n^2 - 2 + 2\nu$;

$$\kappa_n = n^2 + 3n - 2\nu ; \delta_n = n^2 + 2n - 1 + 2\nu ; \zeta_n = n^2 - n - 2 - 2\nu ;$$

$$\Delta n = (\rho^{2n+3} - 1)(\rho^{2-n} - \rho^{n+1}) \{ (n+1) \zeta_n - n \delta_n \} \{ (n+1) \gamma_n - n \kappa_n \} - (1-\rho^2) (\rho^{n+3} - \rho^{n+1}) \cdot \pi (n+1) (\gamma_n + \kappa_n) (\zeta_n + \delta_n) \dots \dots \dots (3)$$

式(1)及び式(2)の解を用いて, $0 < \theta \leq \theta_0$ の区間に線直荷重 P_1 が1個及び線せん断荷重 $P_2 \sin \theta$ が1個作用している時の解が, 1の総和を取るにより得られ, たとえば, 次の通りである。

$$2Gu_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^{n-1} n A_n P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^{n+1} (n+1)(n-2+4\nu) E_n P_n(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^{-(n+2)} D_n (n+1) P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^{-n} C_n \pi (\pi+3-4\nu) P_n(\mu) - \frac{\pi}{2} \{ 2(1-2\nu) E_0 r + D_0/r^2 \} ;$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^{n-2} n(n-1) A_n P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^n (n+1)(n^2-n-2-2\nu) E_n P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^{-(n+3)} D_n (n+1)(n+2) P_n(\mu) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^{-(n+1)} C_n n (n^2+3n-2\nu) P_n(\mu) - \frac{\pi}{2} \{ 2(1+\nu) E_0 - 2D_0/r^2 \} \dots \dots (4)$$

上式中の $A_n, \dots, C_n$ 及び E_0, D_0 などは, たとえば, 式(2)に示したものである。

3. 境界条件 次の図-1に示した厚肉球殻のスタンプの境界条件は, 次の通りである。

$$r = R_1 \text{ において } \sigma_{rr} = 0, \sigma_{re} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$r = R_2, 0 \leq \theta < \theta_0 \text{ において}$$

$$u_r = -R_2(\mu - \cos \theta_0)\mu, u_\theta = R_2(\mu - \cos \theta_0)\sin \theta \dots \dots \dots (6a)$$

$$r = R_2, \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \text{ において } \sigma_{rr} = 0, \sigma_{re} = 0 \dots \dots \dots (6b)$$

$$r = R_2, \pi - \theta_0 < \theta \leq \pi \text{ において}$$

$$u_r = -R_2(\mu + \cos \theta_0)\mu, u_\theta = R_2(\mu + \cos \theta_0)\sin \theta \dots \dots \dots (6c)$$

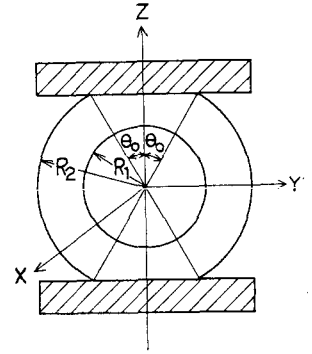


図-1 厚肉球殻のスタンフ

式(5)及び式(6b)の境界条件は、たとえば、式(1)から式(4)において示した解によりすでに満足されている。なぜなら、式(1)から式(4)の解は、 $r = R_1$ において $\sigma_{rr} = \sigma_{re} = 0$ の条件及び $0 < \theta \leq \theta_0$ の区間の $\theta = \theta_0$ のみに線荷重が作用している条件を用いて求めた解であるからである。

図-1に示した様に、 $z = 0$ に関して上、下対称であるので、式(6a)の境界条件について考えると、線荷重の強度 $\bar{f}_e$ 及び $\bar{f}_r$ を求める式が次のように得られる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{1n}^e \bar{f}_e + a_{1n}^r \bar{f}_r) = (\mu - \cos \theta_0)\mu, \sum_{n=0}^{\infty} (a_{2n}^e \bar{f}_e + a_{2n}^r \bar{f}_r) = -(\mu - \cos \theta_0)\sin \theta \dots \dots \dots (7)$$

ここで、たとえば、 $a_{1n}^e = \sin \theta_0 \{ \frac{1}{2}(1-2\nu) + \rho^3(1+\nu) \} / \{ 4(1+\nu)(1-\rho^3) \} + \sum_{m=0}^{\infty} P_n(\mu) P_n(\cos \theta_0) (2n+1) / (2\Delta_n) \{ n/(n-1) [\gamma_n(n+1)(\zeta_n + \delta_n)(\rho^{n+5} - \rho^{n+3}) - \delta_n \{ n\kappa_n - (n+1)\gamma_n \} (\rho^{2-n} - \rho^{n+5})] + (n+1)(n-2+4\nu) \cdot [\gamma_n(2n+1)(\rho^{n+5} - \rho^{2-n}) + n(\gamma_n + \kappa_n)(\rho^{2-n} - \rho^{n+3})] + (n+1)/(n+2) [\pi \delta_n(\gamma_n + \kappa_n)(\rho^{n+3} - \rho^{n+5}) - \gamma_n \{ (n+1)\zeta_n - n\delta_n \} (\rho^{n+5} - \rho^{3n+4})] + \pi(n+3-4\nu) \{ \delta_n(2n+1)(\rho^{n+3} - \rho^{n+5}) + \{ (n+1)\zeta_n - n\delta_n \} (\rho^{n+3} - \rho^{3n+4}) \}] \} \dots \dots \dots (8)$

式(7)は、 $0 < \theta < \theta_0$ の区間における任意の θ に関して満足すべきものであるが、近似的に $0 + \varepsilon \leq \theta_k \leq \theta_0$ ($k=1, 2, \dots, L$)の区間の θ_k の各点において満足するものとし、 $2L$ 元連立1次方程式を解いて L 個の $\bar{f}_e$ 及び $\bar{f}_r$ を数値的に求め式(2)から式(4)に代入して変位成分及び応力成分を求める。

4. 数値計算例 $\theta_0 = \pi/16$, $\varepsilon = 0.005$, $L = 80$, $n=2, 4, \dots, 200$, $\nu = 0.25$, $\rho = 0.6$ として計算した。図-2には、 σ_{rr} の分布を示した。外面($r = R_2$)における値は、スタンフの境界($\theta = \theta_0 = \pi/16$)で連続的に0となり、 $r = 0.9R_2$ における値は、 $\theta = 5\pi/64$ 付近で比較的大きな引張応力を示す。図-3には、 σ_{re} の分布を示した。

$r = R_2$ における値は、スタンフの境界のわずかに内側で最大値を示し、境界においては、連続して0とならず、不連続性を示している。この結果は、スタンフの境界付近で摩擦が存在したために何らかのすべりが生じていることを意味しており興味ある解析結果と思われる。

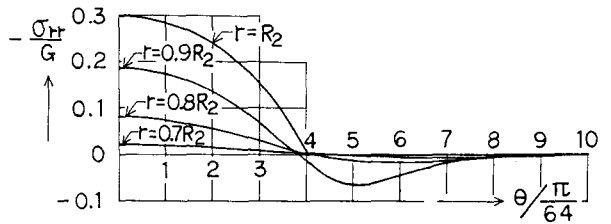


図-2 σ_{rr} の分布

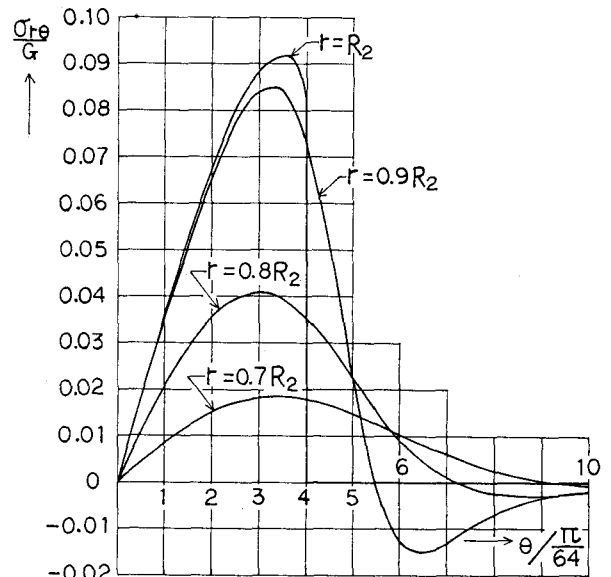


図-3 σ_{re} の分布