

長岡技術科学大学大学院 学生員 中野 錦也

長岡技術科学大学工学部 正 員 笹戸 松二

長岡技術科学大学工学部 正 員 林 正

1. まえがき

構造解析において有限要素法は有力な解析方法ではあるが、長大薄肉構造物の全体解析を行う場合、計算費用が増大し計算効率のよい解法とはいえない。これに対し、有限帯板法は、長大薄肉構造物を構成する薄板の形状が単純な場合には有効な解析方法である。しかし、構造物の長手方向に板厚が変化する場合や中間支承がある場合には、解析が困難となる。そこで、本報告では、両者の欠点を補ったハイブリッド要素法を開発し、若干の数値計算を行った。

2. ハイブリッド要素法の定式化

(1) ハイブリッド要素：不解析法では、構造物の長手方向に直交する仮想の境界線で構造物をブロックに分割し、さらに長手方向の境界線で分割した薄板を要素と考える。各要素の一般化変位として、要素の隅角点にある節点の変位と、長手方向の境界線である節線の変位を級数展開したときの係数の2種の変位を用いる。この要素をハイブリッド要素と呼び、要素の座標系および中央面での変位を図-1のように定める。

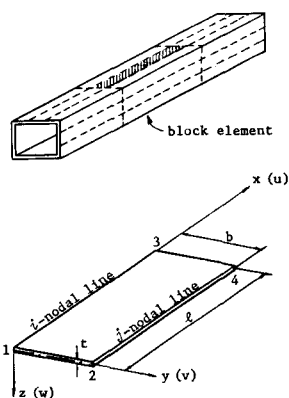


図-1. ハイブリッド要素

(2) 解析仮定：1) 1枚のハイブリッド要素は等方性で、幅・板厚とも一定の長方形板である。2) 1つのブロック内では要素の長さは一定であり、各ブロックは節線で連結されている。3) ハイブリッド要素の曲げ変形に対し、Kirchhoffの仮定が成立する。

(3) 変位関数：ハイブリッド要素の節点自由度として次の6自由度を用いる。

$$u, v, w, \theta_x = \partial w / \partial y, \theta_y = -\partial w / \partial x, \theta_z = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y \quad (1)$$

また、節線自由度には必ずしの連続性を考慮した次の6自由度を用いる。

$$u, v, w, \phi = \partial u / \partial y, \psi = \partial v / \partial y, \theta = \partial w / \partial y \quad (2)$$

節点変位にも6自由度を用いることにより完全な座標変換が行えるため、薄肉構造物の立体解析が容易である。

ハイブリッド要素の中央面上の任意な点 (x, y) における変位を次式のように仮定する。

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1, \quad w = w_0 + w_1 \quad (3)$$

式(3)において、添字0の変位は節点における一般化変位による成分で、エルミートの3次多項式で表わす。また、添字1の変位は節線における一般化変位による成分で、y軸方向には3次多項式で、x軸方向には両端固定の境界条件に対して用いられる次の展開関数¹⁾を用いる。

$$U_m(x) = \sin \alpha_m x, \quad (\alpha_m = m\pi/l), \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$V_m(x) = W_m(x) = \sin \beta_m x - \sinh \beta_m x - (S_m/C_m) \cdot (\cos \beta_m x - \cosh \beta_m x) \quad (5)$$

$$\text{ここに, } C_m = \cos \beta_m l - \cosh \beta_m l, \quad S_m = \sin \beta_m l - \sinh \beta_m l, \quad \cos \beta_m l \cdot \cosh \beta_m l = 1 \quad (6)$$

(4) 平衡方程式：通常の歪-変位関係式を用い、仮想仕事の原理により各ハイブリッド要素の平衡方程式を導く。ブロック内の全要素の平衡方程式を座標変換し重ね合わせると各ブロックの平衡方程式が次のように求まる。

$$\begin{Bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{00} & k_{01} \\ k_{10} & k_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

各ブロックの総節点数, 総節線数をそれぞれ N_p, N_L , 展開項数を K とすると, 式(7)において $k_{00}, k_{01}, k_{10}, k_{11}$ はそれぞれ $(6 \cdot N_p) \times (6 \cdot N_p), (6 \cdot N_p) \times (6 \cdot N_L \cdot K), (6 \cdot N_L \cdot K) \times (6 \cdot N_p), (6 \cdot N_L \cdot K) \times (6 \cdot N_L \cdot K)$ の剛性マトリックスである。また, d_0, d_1 は, それぞれ節点と節線に関する一般化変位であり, δ, δ_1 は, 一般化変位 d_0, d_1 にそれぞれ対応する一般化力である。式(9)より節線変位 d_1 を消去すると, 節点変位 d_0 を未知量とした平衡方程式が求まる。

$$\delta = \begin{bmatrix} k_{00} \end{bmatrix} d_0 \quad (8)$$

$$k = k_{00} - k_{01} [k_{11}]^{-1} k_{10}$$

$$\delta = \delta_0 - k_{01} [k_{11}]^{-1} \delta_1 \quad (9)$$

式(8)はブロックの平衡方程式であり, これを全ブロックについて集めると構造系全体の平衡方程式がえられる。

3. 数値計算例

(1) 単純支持長方形板の面外曲げ : 4辺が単純支持された長方形板に面外等分布荷重 δ が作用する場合について考える。数値計算では対称性を考慮し, 長方形板の $1/4$ について計算を行った(図-2)。解析精度を次に示す無次元量 α により比較する。

$$\alpha = w \cdot D / (\delta \cdot a^4), \quad D = (E t^3) / 12 (1 - \nu^2) \quad (10)$$

ここに, w は長方形板の中央点のたわみである。

解析結果を示す表-1において, 分割数 2×1 等は, x 軸方向と y 軸方向の分割数を表わす。展開関数として両端固定の条件に対して用いられる式(4)~(6)を用いたにもかかわらず, 計算結果と解析解との誤差は展開項数3項で最大0.3%であった。

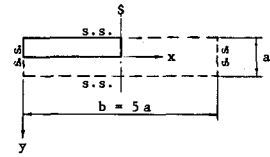


図-2. 単純支持長方形板

表-1. 中央点のたわみ $\alpha (\times 10^{-5})$

Number of terms	Division number		
	1 × 1	2 × 1	2 × 2
3	1296	1295	1293
5	1296	1296	1296
7	—	1296	1296
Exact ²⁾	1297		

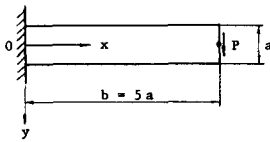


図-3. 長方形片持板

表-2. 荷重作用点の変位 $\alpha (\times 10^{-4})$

Number of terms	Division number			
	1 × 1	1 × 2	2 × 1	2 × 2
3	3323	3323	3336	3340
5	3370	3370	3381	3384
7	3387	3387	3393	3396
9	3396	3396	3400	3402
Exact ³⁾	3463			

(2) 片持板の面内曲げ : 図-3に示すような長方形片持板の自由端中央に集中荷重が作用する場合の計算を行った。荷重作用点の変位 v を次式で無次元化し, 結果を表-2に示す。

$$\alpha = v (a/b)^3 (E t / 12 P) \quad (11)$$

荷重作用点の変位の計算結果と解析解は, 1.8~4.0%の誤差である。また, 応力に関しても展開項数9項で最大3.6%の誤差であった(表-3)。

(3) 連続板の面外曲げ : 図-4に示す3径間連続板に面外等分布荷重 δ が作用する場合について計算を行った。連続板の中央パネルの中央点のたわみ w を式(10)により無次元化し, 表-4に示す。この場合, 要素分割には無関係に展開項数5項程度で収束している。

表-3. 片持板の応力
 (Division number = 1 × 1, $x = 0.2b$)

Stress	y/a	Number of terms				Exact ³⁾
		3	5	7	9	
σ_x	-0.5	13.05	11.80	11.48	11.94	12.00
	-0.25	6.47	6.06	6.01	6.00	6.00
	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.0
τ_{xy}	-0.5	-0.06	0.21	0.22	0.03	0.0
	-0.25	-0.57	-0.60	-0.56	-0.54	-0.56
	0	-0.73	-0.82	-0.82	-0.73	-0.75

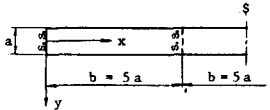


図-4. 3径間連続板

表-4. 連続板のたわみ $\alpha (\times 10^{-5})$

Number of terms	Division number			
	2 × 1	2 × 2	3 × 1	3 × 2
3	1278	1280	1281	1281
5	1291	1291	1291	1291
7	1293	1292	1293	1293
9	1293	1293	1293	1293

4. あとがき

ハイブリッド要素法は節点自由度を用いているので, 境界条件の導入, 要素間の結合が容易であり, 同じ節点自由度を有する有限要素や骨組要素と結合できる。また, 節線変位を用いることにより長大要素が使用でき, 長大構造物の解析においてハイブリッド要素法は有効な解法であらうといえる。なお, 本解法では補剛材を棒要素として取り扱い計算を行ったが, 実用上十分な精度で解析できた。最後に, 本研究において大学院学生 下村 総君(現, 本会会田勤務)の協力を得たことを記して謝意を表する。

- 1) Chung, Y.K. : Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, 1976.
- 2) Timoshenko, S.P. and S. Woinosky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.
- 3) Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier : Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill, 1970.