

北海道大学 正員 三上 隆

北海道大学 正員 芳村 仁

1. はじめに 本報告は、単一な形状の殻の自由振動問題に用いた選点法¹⁾を、形状の異なる殻が組合わった場合に適用し、その有効性の検討を行ったものである。なお、解析モデルは、図-1に示す頸部に球形殻を有する円筒殻である。ここで用いた選点法は、直交多項式(Shifted Legendre 多項式)の零点を選点とするもので、選点の不連続部(球形殻と円筒殻の結合部、固定端)近傍に自動的に密に配置され、比較的小元数のマトリックスを扱えばよいなどの利点を有している。数値例では、種々の形状パラメーター ϕ_0 , L/a , h/a (図-1参照)に対する固有振動数を算出するとともに、それに及ぼす形状パラメーターの影響も明らかにした。

2 解析方法

球形殻、円筒殻の軸、円筒状の法線方向変位を u , v , w とし、円筒方向に級数展開すると次式となる。
$$\begin{aligned} u^j &= \sum_n h V_n^j \cos n\theta \sin \omega t \\ v^j &= \sum_n h V_n^j \sin n\theta \sin \omega t, \quad w^j = \sum_n h W_n^j \cos n\theta \sin \omega t, \quad (j=C, S) \end{aligned} \quad (1)$$
ここで、肩付添字 $j=C$ は円筒殻を、 $j=S$ は球形殻を表わし以下でも同様とする。 h =厚さ、 ω =固有円振動数、 U, V, W =無次元化された変位。

殻の基礎方程式は軸方向座標 $x[0, 1]$ に関する3連立常微分方程式で表わされ次式となる。
$$F_i^j(x, U^j, V^j, W^j, \dot{U}^j, \dot{V}^j, \dot{W}^j, \dots) = 0 \quad (2)$$
ここで、 $i=1, 2, 3$, $j=C, S$, $(\dot{}) = d()/dx$ 。

球形殻の頂点での条件は次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} n=0; & U^S=V^S=\dot{W}^S=\ddot{W}^S-\ddot{U}^S=0, \quad n=1; U^S+V^S=W^S-\dot{U}^S-M_x^S=0 \\ n \geq 2; & U^S=V^S=W^S=\dot{W}^S=0 \quad (M_x=\text{軸方向曲げモーメント}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

球形殻と円筒殻の不連続部での接続条件は次式である。

$$\left. \begin{aligned} U^C &= U^S \cos \phi_0 + W^S \sin \phi_0, \quad W^C = -U^S \cos \phi_0 + W^S \sin \phi_0, \\ V^C &= V^S, \quad W^C = (U^S + W^S)/R, \quad N_x^C = N_x^S \sin \phi_0 + T_x^S \cos \phi_0 \\ M_x^C &= M_x^S, \quad T_x^C = -N_x^S \cos \phi_0 + T_x^S \sin \phi_0, \quad S_{x0}^C = S_{x0}^S \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 R, ϕ_0 =球形殻の半径と半開角、 N_x =軸方向の合力、 T_x, S_{x0} =等価せん断力。

円筒殻下端の固定条件は次の2種類を考慮、 C_1, C_2 の略称を付した。

$$C_1; W^C=\dot{W}^C=U^C=V^C=0, \quad C_2; W^C=\dot{W}^C=U^C=S_{x0}^C=0 \quad (5)$$

振動数方程式は以下の手順で得られる。式(2)に現われる導関数は1~4次である。まず、これらを選点での解の値と結びつけるマトリックスを導く。つぎにこれらを用いて基礎方程式の内部選点に於ける残差 R を求める。

$$\left. \begin{aligned} R_i^C[x_1 \dots x_{M+2}, U^C(x_1) \dots U^C(x_{M+2}), V^C(x_1) \dots V^C(x_{M+2})] &= 0 \\ R_i^S[x_1 \dots x_{M+2}, U^S(x_1) \dots U^S(x_{M+2}), V^S(x_1) \dots V^S(x_{M+2})] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 $i=1, 2, 3$, M =内部選点数、 $x_1=0, x_{M+2}=1$,

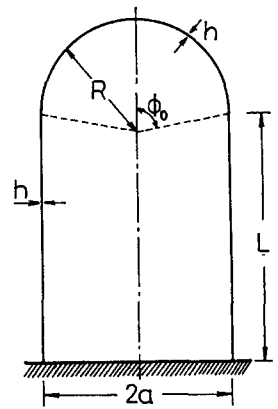


図-1 解析モデル

$x_2 \sim x_{M+1}$ = 内部選点

また、球形殻の頂点、結合部、円筒殻下端の条件より次式が得られる。

$$B_i[4 \dots x_{M+2}, U^C(x_1) \dots U^C(x_{M+2}), V^C(x_1) \dots V^C(x_{M+2})] = 0, (i=1 \sim 16) \quad (7)$$

式(6)と式(7)より振動数方程式は、内部選点での変位モード値を未知ベクトルとする次式で得られる。

$$(A - \Omega^2 I) \{\delta y\} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $\Omega^2 = \rho a^2 \omega^2 / E$, a =円筒殻の半径、 ρ =密度、 E =弾性係数、 $A = 6M \times 6M$ のマトリックス、

$$\{\delta y\}^T = \{U^C(x_2) \dots U^C(x_{M+1}), V^C(x_2) \dots V^C(x_{M+1}), \dots, W^C(x_2) \dots W^C(x_{M+1})\}$$

3. 数値計算例

結果は、振動数パラメーター $\Omega = a\omega\sqrt{\rho/E}$ を用い整理した。

表-1 a), b)に、 $L/a=1.0$, $h/a=0.02$, $\phi_0=90^\circ$, ポアソン比 $=0.2$ の場合の、選点数 M に対する固有振動数の収束状態を示す。a)は基本固有振動数、b)は2~5次に対するものであるが、良好な収束性が得られ、また

少ない選点数で高精度の数値解が得られている。なお、以下では、 $M=11$ とした。

図-2に $L/a=2.0$, $h/a=0.01$, $\phi_0=90^\circ$ の場合の固有円振動数に与える、円筒殻下端の境界条件 C_1, C_2 の影響を示す。境界条件により振動特性は著しく異なり、特に波数 n が小さいとき顕著である。以下の数値例では条件 C_1 を用いた。

図-3には $\phi_0=90^\circ$, $h/a=0.01$ の場合の基本固有振動数に及ぼす L/a の影響を示す。最小固有振動数を与える波数 n は、 L/a の増加とともに小さくなる。なお、ここでは示さないが、 L/a =一定とする場合も、 h/a の増加とともに最小固有振動数を与える波数 n は小さくなる。

図-4に $L/a=2.0$, $h/a=0.01$ の場合の基本固有振動数に与える半円角 ϕ_0 の

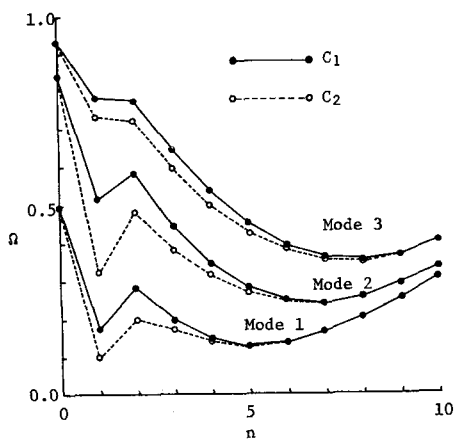


図-2 条件 C_1, C_2 の Ω に与える影響

表-1a) 軸方向モード次数 1 の Ω の収束性

Circumferential mode n	Series solution	F.E.M. ²⁾	This study		
			$M=9$	$M=10$	$M=11$
0	0.64664	0.64663	0.64664	0.64664	0.64664
1	0.29628	0.29628	0.29629	0.29629	0.29629
2	0.50551	0.50916	0.50910	0.50910	0.50910
3	0.41020	0.41067	0.41062	0.41062	0.41062
4	0.34374	0.34385	0.34374	0.34374	0.34374

表-1b) 軸方向モード次数 $2, 5$ の Ω の収束性

Axial mode m	Circumferential mode n					
	$n=0$			$n=1$		
	$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=9$	$M=10$	$M=11$
2	0.92289	0.92289	0.92289	0.78722	0.78722	0.78722
3	0.98076	0.98077	0.98077	0.86635	0.86636	0.86636
4	1.00581	1.00591	1.00590	0.96626	0.96626	0.96626
5	1.02976	1.02997	1.02996	0.98172	0.98172	0.98172

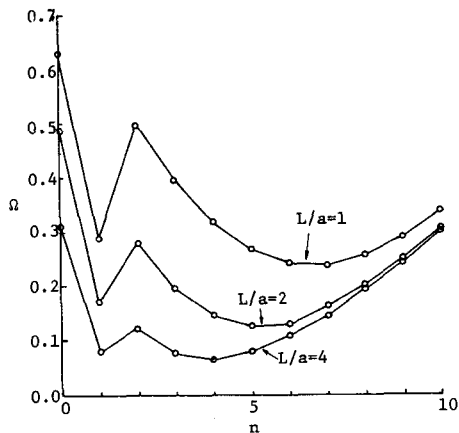


図-3 L/a の Ω に与える影響

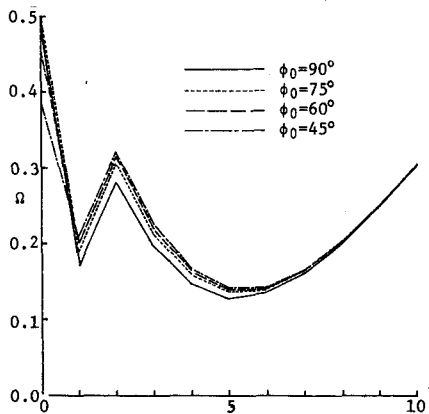


図-4 ϕ_0 の Ω に与える影響

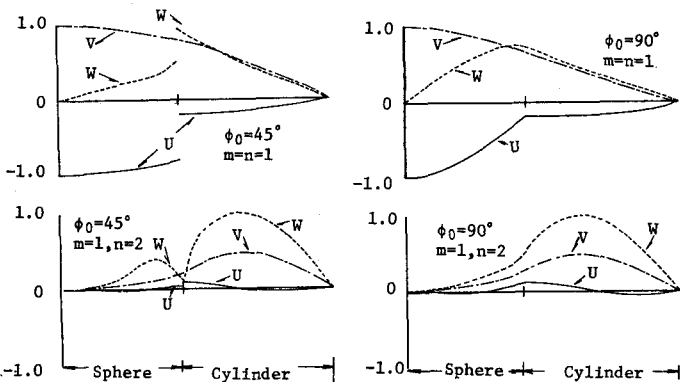


図-5 $\phi_0=45^\circ, 90^\circ$ のモード

影響を示す。半円角のそれに及ぼす影響は少なく、振動数は波数 n が大きくなるにつれば一定値をとる。これは図-5のモード形が示すように、波数 n が大きくなるに従い、円筒殻の領域での変形モードが支配的になることから推察される。

4. まとめ 形状の異なる殻からなる軸対称殻の自由振動問題に選点法を適用し、その有効性を示すとともに、キヤップ付き円筒殻の振動特性の検討を行った。参考文献 1) 三上、芳村。才田回生学会年次学術講演会講演概要集 才1部, 1980 2) R.A. FEIJÓO et al, Int. J. Num. Mech. Engng, 16, pp19-33, 1980