

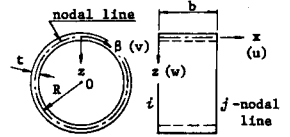
長岡技術科学大学工学部 正 員 林 正
 長岡技術科学大学工学部 正 員 荻 戸 松二
 長岡技術科学大学大学院 学生員 藪下 登喜雄

1. まえがき

有限帯板法は、単純な形状を有する薄肉構造物の全体解析に適した計算効率の良い解法であるが、有限変位解析に適用された例は数少ない。本報告では、文献(1)に用いた解析手法を薄肉円筒シェルの座屈後の解析に適用したものである。帯板要素にはリング要素を採用し、節線上での面内ひずみの連続性を満足させるために6自由度の変位成分を用いた。解式は、座屈後の等動も追跡するために2次元非線形項まで用いて、非線形剛性行列を解析的に求めた。また、数値計算では、帯板法に適用できる変位増分法⁽¹⁾を用いて計算時間を短縮するとともに、不安定現象の計算に対しても安定した解が得られるようにした。

2. 変位関数とひずみ

(1) リング要素 リング要素は、図-1に示すような幅 b 、厚さ t 、曲率半径 R が一定な円筒要素である。シェルの変形と応力に関してKirchhoff-Loveの仮定が成り立つものとし、有限変位の記述にはLagrange方式を用いる。



リング要素の座標系は、中央面上において母線方向に x 軸、円周方向に β 軸、断面の中心点方向に z 軸をとる。これらは右手直交曲線座標系 (x, β, z) をなす。また、座標軸方向の変位 u, v, w とし、 $x=0$ と $x=b$ の中央面上の節線を、それぞれ i 及び j 節線とする。

(2) 一般化変位 節線変位には、 u, v, w のほかにはこれらの成分の x に関する3次微係数を用いる。

$$\phi = \partial u / \partial x, \quad \psi = \partial v / \partial x, \quad \theta = \partial w / \partial x \quad (1)$$

以上の6成分の変位を級数展開して、節線変位の第 m 項の係数 d_m 、すなわち一般化変位を次式で定める。

$$d_m = \{u_{im}, \phi_{im}, v_{im}, \psi_{im}, w_{im}, \theta_{im}, w_{jm}, \theta_{jm}\}^T \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

また、節線上の初期変位も級数展開すれば、その第 m 項の係数 d_m^0 の成分は式(2)と同じ形で与えられる。

中央面上の任意の点 $(x, \beta, z=0)$ の変位 u, v, w 及び初期変位 u^0, v^0, w^0 は、エルミートの3次多項式を成分とする12次の x に関する関数ベクトル f_i と展開関数 U_m, V_m, W_m を用いて次式で表わされる⁽¹⁾。

$$u = f_1^T \sum_m U_m d_m, \quad v = f_2^T \sum_m V_m d_m, \quad w = f_3^T \sum_m W_m d_m \quad (3)$$

$$u^0 = f_1^T \sum_m U_m d_m^0, \quad v^0 = f_2^T \sum_m V_m d_m^0, \quad w^0 = f_3^T \sum_m W_m d_m^0 \quad (4)$$

$$U_m = \cos m\beta, \quad V_m = \sin m\beta, \quad W_m = \cos m\beta \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

(3) ひずみ成分 初期変位を考慮した円筒シェルの任意点 (x, β, z) のひずみ成分には次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(w+2w^0)}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{R \partial \beta} - \frac{w}{R} - z \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial(w+2w^0)}{2R^2 \partial \beta} + v \frac{\partial(w+2w^0)}{2R^2 \partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial(v+2v^0)}{2R^2} + v \frac{\partial(v+2v^0)}{2R^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \beta} - z \frac{2}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial(w+2w^0)}{2R \partial x} + v \frac{\partial(w+2w^0)}{2R \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(w+2w^0)}{2R \partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(v+2v^0)}{2R} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)に式(3), (4)を代入すると、 $\{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = \{e_1, e_2, e_3\}^T$ とおけば一般的に次式が得られる。

$$e_i = \sum_m \left\{ a_{im}^T + \frac{1}{2} \sum_k \{ d_k + 2d_k^0 \}^T [A_{imk}] \right\} d_m \quad (i=1, 2, 3) \quad (7)$$

ここに12次のベクトル a_{im} と12次の行列 A_{imk} は座標値のみの関数である。

3. 平衡方程式

仮想仕事の原理に式(7)のひずみ成分を用いると、リング要素の平衡方程式とそれを線形化した式が得られる。

$$\sum [K_{mn}] d\mathbf{n} = \mathbf{f}_m, \quad \sum [\Delta K_{mn}] \Delta d\mathbf{n} = \Delta \mathbf{f}_m - \mathbf{W}_m \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

ここに $\mathbf{f}_m$ は $d\mathbf{n}$ に対応する一般化力, $\mathbf{W}_m$ は不平衡力, 添記号 Δ は増分を表す。剛性行列 K_{mn} と ΔK_{mn} は

$$K_{mn} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \int_V \left\{ a_{im} + \sum_k [A_{ikm}] \{ d\mathbf{k} + d\mathbf{k}^0 \} \right\} \left\{ a_{jn}^T + \frac{1}{2} \sum_k \{ d\mathbf{k} + 2d\mathbf{k}^0 \}^T [A_{jkn}] \right\} dV \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta K_{mn} = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \int_V \left\{ \left\{ a_{im} + \sum_k [A_{ikm}] \{ d\mathbf{k} + d\mathbf{k}^0 \} \right\} \left\{ a_{jn}^T + \sum_k \{ d\mathbf{k} + d\mathbf{k}^0 \}^T [A_{jkn}] \right\} \right. \\ & \left. + \sum_k (a_{ik}^T d\mathbf{k} + \frac{1}{2} \sum_k \{ d\mathbf{k} + 2d\mathbf{k}^0 \}^T [A_{ijk}] d\mathbf{k}) [A_{inm}] \right\} dV \end{aligned} \quad (10)$$

ここに D_{ij} は弾性行列の要素である。式(9), (10)の剛性行列を展開すれば、最終的にはベクトル $\mathbf{f}_i$ のディアド積で表すことができるので¹⁾、非線形項を含むこれらの剛性行列を解析的に陽形形で求められる。

4. 数値計算例

(1) 計算例 図-2に示すような両端に軸圧縮荷重を受ける円筒シェルの分岐座屈を計算する。 $x=0$ と L における境界条件には次の2通りの場合を考える。

単純支持 : $v = \partial v / \partial x = w = 0$

固定支持 : $v = \partial v / \partial x = w = \partial w / \partial x = 0$

(11)

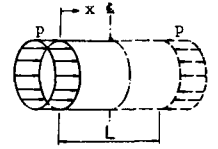


図-2 計算例

数値計算では、最初の数回の増分計算には荷重増分法を用い、それ以後の計算には変位増分法を使用した。

(2) 単純支持の円筒シェル

両端単純支持された円筒シェルの軸方向変位の対称性を仮定して、シェルの半分について計算した。

計算には次の数値を用いた。

$$L/R = 2, \quad R/t = 150,$$

$$\nu = 0.34, \quad E = 7.2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

初期不整 w^0, θ^0 には古典座屈解

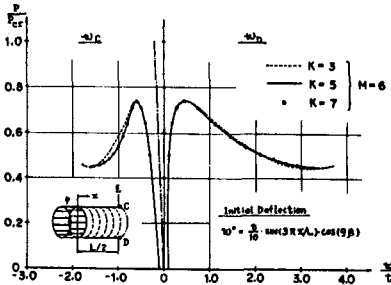


図-3 荷重-法線方向変位曲線

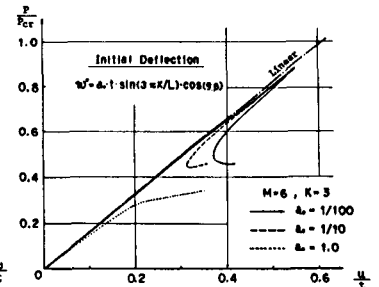


図-4 荷重-軸方向変位曲線

折の結果²⁾から母線方向に3半波、円周方向に9半波の初期変位を与えた。 w^0 の振幅 Q_0 を $t/10$ 、表-1 分岐荷重分割数 M を6として展開項数 K ($m=0, 9, 18, \dots$) を変えた場合の法線方向変位 w の計算結果を図-3に示す。 $K \geq 3$ (かつ $M \geq 6$) の場合には分岐荷重の差は1%程度であるが、座屈後の w の値は少し異なる。 Q_0 を変化した場合の軸方向変位 u を図-4に、そのときの分岐座屈荷重の値を表-1に示す。これより初期不整による座屈荷重の低下が明瞭にわかる。

Q_0	P/P_{cr}
1/10	0.741
1/100	0.879
1/1000	0.912

(3) 固定支持の円筒シェル 初期不整 w^0, θ^0 には、円周方向に25半波³⁾、母線方向に両端固定梁の基本固有振動モードを用い、次の諸元を使用した。

$$L/R = 4, \quad R/t = 250, \quad \nu = 0.3, \quad E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\begin{aligned} w^0 = & (t/10) \{ \sin \gamma \xi - \sinh \gamma \xi - \alpha (\cos \gamma \xi - \cosh \gamma \xi) \} \cdot \cos(25\beta\theta), \\ \theta^0 = & \partial w^0 / \partial x, \quad \gamma \xi = 4.73(x/L), \quad \alpha = (\sin \gamma - \sinh \gamma) / (\cos \gamma - \cosh \gamma) \end{aligned} \quad (12)$$

$K=3$ ($m=0, 25, 50$) とした場合の u の値を図-5に示す。 $K \geq 3$ (かつ $M \geq 2$) の場合には分岐座屈荷重の値に差はないが、座屈後の挙動に差が認められる。

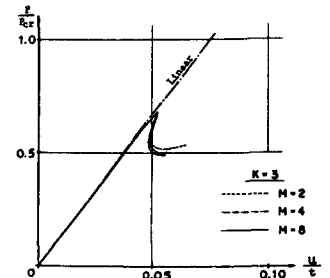


図-5 荷重-軸方向変位曲線

5. あとがき 本研究結果により、薄肉円筒シェルの有限変位解析に対しても有限帯板法は有効な解法であると思われる。他の円筒シェルの問題に対して本解析法を適用し、その汎用性と解析精度を確かめた。

1) 前田幸雄・林正・森寛司：有限帯板法による薄板の有限変位解析，土木学会論文報告集，No. 316, 1981。

2) Timoshenko, S.P. and J.M.Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961。

3) 山田嘉明・岩田耕司：有限要素法による不安定現象の解析，マトリックス構造解析法研究発表論文集，JSSC 第9回大会，1975。