

大阪市立大学 正員 ○小林 治 俊

大阪市立大学 正員 園 田 恵 一 郎

1 まえがき 弾性基礎上のせん断変形を考慮した矩形板に対しては、若干の解析例がある。周辺単純支持板に対する Frederick [1], Voyiadjis・Babuch [2] の級数解, 周辺自由板に対する Svec [3] の FEM 解, Henwood [4] による差分解であるが, 粘弾性基礎上の同種の問題に対しては解析例は見当たらない。著者は [5, 6, 7], 先に各種境界をもつ矩形や円形の薄板, 更に厚円板に対し自由振動問題から得られる固有関数を用いて, 弾性基礎問題に対する解式を求めた後に, <対応原理>により, その解式を粘弾性問題へと拡張する方法を示した。本文は、この手法をせん断変形を考慮した矩形板に適用し, 解の誘導を試みたものである。平板の古典理論に対し, せん断変形を含めるための修正理論は幾つかあるが, 本文では, せん断修正係数を導入する Mindlin 理論を用いた。Mindlin 理論は, せん断修正係数を $5/6$ に採ることにより, 変位・断面力が $Panc$ の修正理論 [8], transverse stress σ_z の効果を無視した場合の Reissner 理論に一致する。

2 弾性基礎問題 w を板中直面のたわみ, ψ_x, ψ_y を曲げ
による板の回転とすると, つり合い式は,

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + K G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) = 0 ;$$

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + K G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) = 0 ;$$

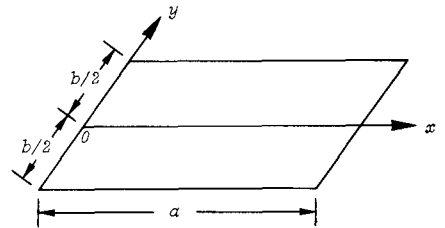


図1. 座標系

$$K G h (\nabla^2 w - \Phi) = p w - q ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} ; \quad \Phi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (1)$$

上式で, D = 曲げ剛性, G = せん断弾性係数, h = 板厚, ν = ポアソン比, K ($=5/6$) = せん断修正係数, R = 基礎係数, q = 分布荷重。断面力は, w, ψ_x, ψ_y によって次式で表わされる。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) ; M_y = -D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) ; M_{xy} = -\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) ; Q_x = K G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) ; Q_y = K G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \quad (2)$$

本文では, 境界条件が $x=0, a$ で単純支持, $y=\pm b/2$ で固定もしくは自由である矩形板を考える (図1) :

$$M_x = \psi_y = w = 0 \quad \text{at } x=0, a ; \quad \psi_x = \psi_y = w = 0 \quad (\text{固定}), \quad M_y = M_{xy} = Q_y = 0 \quad (\text{自由}) \quad \text{at } y=\pm b/2 \quad (3)$$

単純支持に対する条件は $M_{xy} = 0$, 即ち y 方向への拘束を意味する。この拘束の影響については, 文献 [9] などで議論されており, ここでは省略する。

式(1)の解式に, 回転慣性を無視した Mindlin Plate の固有関数, $W_{mn}(y) \cdot \bar{\psi}_{x,mn}(y) \cdot \bar{\psi}_{y,mn}(y)$ を用いる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} W_{mn}(y) \sin \alpha_m x ; \quad \psi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \bar{\psi}_{x,mn}(y) \cos \alpha_m x ; \quad \psi_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \bar{\psi}_{y,mn}(y) \sin \alpha_m x ; \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad (4)$$

固有関数は, 3つのポテンシャル W_1, W_2, W_3 により次式で与えられる。

$$W_{mn} = W_1 + W_2 ; \quad \bar{\psi}_{x,mn} = (1-\sigma_1) \alpha_m W_1 + (1-\sigma_2) \alpha_m W_2 + dW_3/dy ; \quad \bar{\psi}_{y,mn} = (1-\sigma_1) dW_1/dy + (1-\sigma_2) dW_2/dy + \alpha_m W_3 \quad (5)$$

$$\left[\begin{aligned} W_1 &= A_1 \cosh \gamma_1 y \quad (\delta_1^2 < \alpha_m^2), \quad \bar{A}_1 \cos \bar{\gamma}_1 y \quad (\delta_1^2 > \alpha_m^2) ; \quad W_2 = A_2 \cosh \gamma_2 y ; \quad W_3 = A_3 \sinh \gamma_3 y \\ \gamma_1^2 &= \alpha_m^2 - \delta_1^2, \quad \bar{\gamma}_1^2 = \delta_1^2 - \alpha_m^2, \quad \gamma_2^2 = \delta_2^2 + \alpha_m^2, \quad \gamma_3^2 = \delta_3^2 + \alpha_m^2, \quad (\delta_1^2, \delta_2^2) = \frac{1}{2} \lambda_{mn}^4 (\pm S + \sqrt{S^2 + 4 \lambda_{mn}^4}) a^{-2} \\ \delta_3^2 &= 2/[S a^2 (1-\nu)], \quad (\sigma_1, \sigma_2) = S / (\delta_2 a^2, -\delta_1 a^2), \quad S = D/K G h a^2, \quad \lambda_{mn} = \text{固有値} \end{aligned} \right]$$

定数 $A_1, \bar{A}_1, A_2, A_3$ 及び固有値を与える特性方程式は, $y=\pm b/2$ における境界条件より決定される。

次に, 固有関数の直交性を利用して荷重 $q(x, y)$ を次の様に展開する。

$$g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} W_{mn}(y) \sin \alpha_m x ; g_{mn} = \frac{\int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} g(x,y) W_{mn}(y) \sin \alpha_m x dx dy}{\int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} [W_{mn}(y) \sin \alpha_m x]^2 dx dy} \quad (6)$$

式(4)(6)を式(1)に代入すれば、最初の2式は恒等的に満され、第3式より基礎係数 A_{mn} が決定される。

$$A_{mn} = \frac{a^4}{D} \cdot \frac{g_{mn}}{\lambda_{mn}^4 + K^4} , K^4 = \frac{ka^4}{D} \quad (7) \quad \text{よて, } W = \frac{a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{mn}}{\lambda_{mn}^4 + K^4} W_{mn}(y) \sin \alpha_m x \quad (8)$$

y_x, y_y は省略。基礎反力は $P = kW$ より求められる。

3 粘弾性解 式(6)において、基礎係数を固有関数に含まれていないので式(8)に＜対応原理＞を適用すると、ラプラスの逆変換が容易にとれて粘弾性基礎問題の解式を得ることが出来る。ここでは、三要素モデル(図2)についてのみ記述するが、他の線形粘弾性モデルについても同様に解式が求められる。

Step 荷重 $H(t)$ ($g(x,y)$)に対する粘弾性解のラプラス変換式 $\bar{W}$ と、その逆変換式(粘弾性解) W は、

$$\bar{W}(x,y,s) = a^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{g}_{mn}(s)}{D \lambda_{mn}^4 + \bar{k}(s) a^4} W_{mn}(y) \sin \alpha_m x ; W(x,y,t) = w(x,y) = \frac{a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{mn} T(x)}{\lambda_{mn}^4 + K^4} W_{mn}(y) \sin \alpha_m x \quad (9)$$

ここで、 $\bar{k}(s) = k(1 + \tau_c s)/(1 + \tau_r s)$; $\tau_c = (1 + k_1/k_2)/k$, $\tau_r = \eta/k_1$, $\bar{g}_{mn}(s) = g_{mn}/s$,
 $T(x) = (K_1/\lambda_{mn}^4) / [1 + (k_2/\lambda_{mn}^4)] \exp \{ -[(k_2/K) + (k_2/\lambda_{mn}^4)] / [1 + (k_2/\lambda_{mn}^4)] \cdot t/\tau_c \}$, $K_1^4 = k_1 a^4/D$, $K_2^4 = K^4 + K_1^4$
 式(9)で $w(x,y)$ は式(8)で与えられる弾性解で、数値計算の際は、基礎係数を含む項と含まない項とに分離することにより収束性を高めることが出来る[7]。

4 数値計算例 $y = \pm b/2$ で自由辺を有する正方形板が、板の中央に $0.2a \times 0.2a$ の部分等分布荷重を受ける場合につき計算を行った。他の諸元は、 $\nu = 1/6$, $K = 3$, $k_1 = 2k$ 。表1は、 t/a に対する、たわみ・曲げモーメントの値(弾性基礎問題)を示したもので、 t/a の増加に対し、板中央での w, M_y , 自由辺の中央での M_x が増加する一方、板中央での M_x 自由辺での w は減少していることがわかる。図2は、三要素モデル基礎上の正方形板のたわみの経時変化を描いたものである。初期状態、最終状態は、基礎係数が、それぞれ k ($k_1 + k_2$) , k の弾性基礎問題に対応している。

表1. k/a に対するたわみ、モーメント(弾性基礎問題)

h/a	$x=a/2 ; y=0$			$x=a/2 ; y=\pm b/2$	
	w	M_x	M_y	w	M_x
	$10^{-1} q/k$	$10^{-2} qa^2$	$10^{-2} qa^2$	$10^{-1} q/k$	$10^{-2} qa^2$
0	0.4330	0.8240	0.5599	0.2824	0.3488
0.05	0.4380	0.8233	0.5611	0.2806	0.3552
0.10	0.4521	0.8195	0.5618	0.2789	0.3593
0.15	0.4751	0.8126	0.5619	0.2775	0.3613
0.20	0.5068	0.8029	0.5615	0.2761	0.3610

References

[1] D.Frederic: Thick Rectangular Plates on an Elastic Foundation, Transaction, ASCE, Vol.122(1957)
 [2] G.Z.Voyiadis et al.: Thick Plates on Elastic Foundations: Proc.ASCE, EMD, Vol.105(1979)
 [3] O.J.Svec: Thick Plates on Elastic Foundations by Finite Elements, Proc.ASCE, EMD, Vol.102(1976)
 [4] D.J.Henwood et al.: Finite Difference Solution of a System of First-Order....., J.N.M.E, Vol.17(1981)
 [5] K.Sonoda et al.: Circular Plates on Linear Viscoelastic Foundations, Proc.ASCE, EMD, Vol.104(1978)
 [6] K.Sonoda et al.: Rectangular Plates on Linear Viscoelastic Foundations, Proc.ASCE, EMD, Vol.106(1980)
 [7] H.Kobayashi et al.: Thick Circular Plates on Linear Viscoelastic Foundations, NACTAM, Vol.31(to appear)
 [8] V.Panc: Theories of Elastic Plates, Noordhoff, (1975)
 [9] K.Marguerre and H.T.Woernle: Elastic Plates, Blaisdell, (1967)

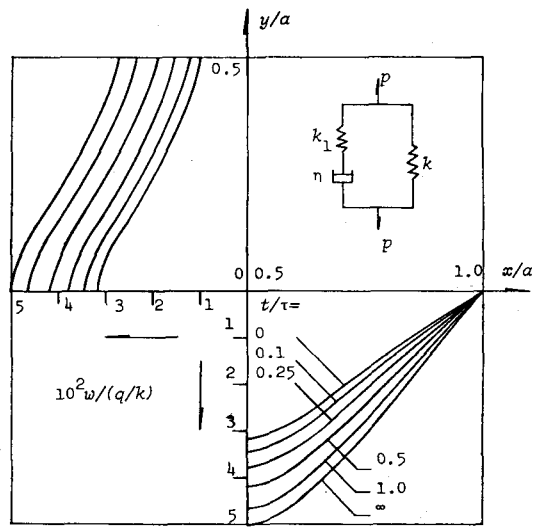


図2. 三要素モデル基礎上の正方形板のたわみの経時変化